

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE

TÜBINGEN

K. KNOPP

TÜBINGEN

R. NEVANLINNA

HELSINKI

E. SCHMIDT

BERLIN

F. K. SCHMIDT

HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT

TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE · L. FEJÉR · A. E. INGHAM

H. KNESER · W. MAGNUS · O. PERRON

W. SÜSS · H. WEYL

63. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 28. SEPTEMBER 1955)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1955

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

63. Band

Inhalt

2. Heft Seite

Schulz, W., Über Reduzibilität bei gewissen Polynomen und das Tarry-Escott'sche Problem.	133
Frucht, R., Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen . . .	145
Hopf, E., Die Harnacksche Ungleichung für positive harmonische Funktionen . . .	156
Fekete, M., and G. Szegő, On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set	158
Bergman, S., Bounds for Analytic Functions in Domains with a Distinguished Boundary Surface	173
Rothe, E. H., Mapping degree in Banach spaces and spectral theory	195
Bernays, P., Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome	219
Bochner, S., Green-Goursat Theorem	230

Über Reduzibilität bei gewissen Polynomen und das Tarry-Escottsche Problem.

Zum Gedenken an den 80. Geburtstag meines verehrten Lehrers

I. SCHUR am 10. Januar 1955.

Von

WERNER SCHULZ.

1

I. SCHUR befaßte sich wohl als erster mit der Frage, ob Polynome, die an gewissen ganzzahligen Stellen vorgeschriebene Werte annehmen, im Körper der rationalen Zahlen reduzibel oder irreduzibel sind. Die beiden einfachsten Fälle dieser Art, bei denen nämlich die Anzahl der Stellen gleich dem Grad des Polynoms ist und die vorgeschriebenen Werte sämtlich gleich $+1$ bzw. -1 sind, wurden von ihm im Jahre 1908 als Aufgabe gestellt [1]. Es gelten hierüber die Sätze:

I. Ein Polynom n -ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, das an n ganzzahligen Stellen den Wert 1 annimmt, ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel, sofern $n \neq 2$ und $\neq 4$ ist. Im Falle $n = 2$ tritt Reduzibilität dann und nur dann ein, wenn die beiden Stellen den Abstand 2 voneinander haben. Im Falle $n = 4$ ergeben sich reduzible Polynome dann und nur dann, wenn die vier Stellen vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind. In allen Fällen von Reduzibilität ist das zerfallende Polynom das Quadrat eines irreduziblen Polynoms.

II. Ein Polynom n -ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, das an n ganzzahligen Stellen den Wert -1 annimmt, ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

Diese Aufgaben sind von SCHUR selbst und später in mehreren Arbeiten von Verfassern, die in Berlin dem SCHURSchen Schüler- und Hörerkreis angehörten, nach verschiedenen Seiten hin verallgemeinert worden. Genannt seien die Namen A. BRAUER, R. BRAUER, H. HOPF, H. ILLE, U. WEGNER. Nähere Angaben hierüber findet man in der Arbeit, die die Herren ALFRED und RICHARD BRAUER in dieser Zeitschrift vor 20 Jahren SCHUR zum 60. Geburtstag widmeten [2].

Auch außerhalb des SCHURSchen Kreises fand der hier angeschnittene Fragenkomplex Bearbeiter. Einschlägige Untersuchungen von J. WESTLUND, G. PÓLYA, H. L. DORWART, O. ORE, L. WEISNER sind in [2] zitiert. Besonderes Interesse hat hierbei ein Fall gefunden, den zuerst PÓLYA [3] aus einem allgemeineren Kriterium erhielt:

III. Es sei $n \geq 17$. Wenn unter den Werten des ganzzahligen Polynoms $f(x)$ vom Grade n dieselbe Primzahl, positiv oder negativ genommen, n -mal vorkommt, dann ist $f(x)$ entweder irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Faktoren gleichen Grades.

Daß die Zahl 17, die in diesem Satz auftritt, durch die kleinere 7 ersetzt werden kann, zeigte A. BRAUER [4]. Für $n=6$ dagegen ist der PÓLYASche Satz nicht mehr richtig, wie ein in [4] angeführtes Beispiel zeigt: Das Polynom 6. Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, das an 6 aufeinanderfolgenden ganzzahligen Stellen den Wert -5 annimmt, ist durch ein quadratisches Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten teilbar.

Unabhängig von A. BRAUER und fast zur gleichen Zeit wie dieser befaßten sich auch H. L. DORWART und O. ORE [5] mit dem Satz III.

2

Für den Satz III bleibt die Frage zu entscheiden, ob im Falle gerader Gradzahlen $n=2m \geq 8$ von $f(x)$ der Zerfall in zwei Faktoren m -ten Grades eintreten kann, und mit dieser Frage sollen sich die folgenden Betrachtungen weiter beschäftigen.

Für $n=8$, also $m=4$, gab schon PÓLYA in [3] ein Beispiel für Reduzibilität an:

IV. Das Polynom 8. Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, das an den 8 Stellen $\pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11$ den Primzahlwert 2879 annimmt, ist reduzibel.

Für den Fall $n=10$ fand ich ein reduzibles Polynom, das A. BRAUER in [4] anführt und das in einer gegenüber dort etwas geänderten Formulierung lautet:

V. Das Polynom 10. Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, das an den 10 Stellen $\pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 9, \pm 10$ den Primzahlwert 10079 annimmt, ist reduzibel.

In Abschnitt 4 wird sich zeigen, daß bis zum Grad $2m=20$ die Existenz reduzibler Polynome der betrachteten Art gesichert ist. Darüber hinaus ist die Frage nach der Möglichkeit eines Zerfalls bis heute unerledigt.

Wichtig sind folgende beiden Hilfssätze, die sich aus den Betrachtungen in [4] und [5] ergeben:

VI. Ein ganzzahliges Polynom, das an mindestens fünf verschiedenen ganzzahligen Stellen den Wert ± 1 annimmt, nimmt an diesen Stellen entweder überall den Wert $+1$ oder überall den Wert -1 an.

VII. Ein ganzzahliges Polynom, das an mindestens sechs verschiedenen ganzzahligen Stellen den Wert $\pm p$ annimmt (p = Primzahl), nimmt an diesen Stellen entweder überall den Wert $+p$ oder überall den Wert $-p$ an.

Diese beiden Hilfssätze bilden die Grundlage für eine genauere Einsicht in die Art des Zerfalls bei geraden Gradzahlen. Folgende Erkenntnis wird hierüber in [4] gewonnen:

VIII. Für ein ganzzahliges Polynom vom Grade $2m \geq 8$, das an $2m$ ganzzahligen Stellen den Wert $\pm p$ annimmt, kann ein Zerfall in zwei Faktoren m -ten Grades nur in der Weise eintreten, daß die Summe oder die Differenz der beiden Faktoren konstant ist.

3

Es soll nun über den Satz VIII hinausgehend eine genauere Aussage hinsichtlich des Zerfalls in zwei Faktoren bewiesen werden, die in etwas anderer Form bereits in meiner Dissertation [6] enthalten ist. Die Polynome vom Grade $2m \geq 8$, die auf ihre Reduzibilität hin zu untersuchen sind, können auf Grund von VII in der Form

$$(1) \quad f(x) = A(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_{2m}) \pm p \quad (A > 0)$$

angesetzt werden. Existiert eine Zerlegung

$$(2) \quad f(x) = g(x) h(x),$$

$$(3) \quad \text{Grad } g(x) = \text{Grad } h(x) = m,$$

so darf angenommen werden, daß für $g(x)$ und $h(x)$ die Koeffizienten von x^m positiv sind. Von den beiden in VIII genannten Fällen muß dann der eintreten, daß die Differenz $g(x) - h(x)$ konstant ist. Zugleich zeigt sich, da die höchsten Koeffizienten von $g(x)$ und $h(x)$ übereinstimmen und ihr Produkt gleich A ist, daß A eine Quadratzahl sein muß.

Von den $2m$ (nach Voraussetzung voneinander verschiedenen) Stellen c_v kann angenommen werden, daß sie nach wachsender Größe geordnet sind. Ferner kann man sie mittels einer linearen Transformation von x , die an den Reduzibilitätsverhältnissen von $f(x)$ nichts ändert, so legen, daß die erste Stelle auf Null fällt. Dann gelten also die Bedingungen

$$(4) \quad 0 = c_1 < c_2 < \dots < c_{2m}.$$

Es wird behauptet:

IX. Wenn das Polynom (1) vom Grade $2m \geq 8$ reduzibel ist und für die Stellen c_v die Bedingungen (4) gelten, dann haben die beiden Faktoren $g(x)$ und $h(x)$ von $f(x)$ die Form¹⁾

$$(5) \quad \begin{cases} g(x) = A'(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \pm (-1)^m \\ \quad = A'(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m) - (-1)^m p, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} h(x) = A'(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) + (-1)^m p \\ \quad = A'(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m) \mp (-1)^m. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(7) \quad A' = \sqrt{A},$$

¹⁾ In Ausdrücken, die doppelte Vorzeichen besitzen, gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem ob $f(x)$ an den Stellen c_v den Wert $+p$ oder $-p$ annimmt.

die Werte a_μ und b_μ sind in ihrer Gesamtheit die Werte c_ν , und zwar in folgender Anordnung:

$$(8) \quad \begin{cases} a_{2\kappa-1} = c_{4\kappa-3}, & a_{2\kappa} = c_{4\kappa}, \\ b_{2\kappa-1} = c_{4\kappa-2}, & b_{2\kappa} = c_{4\kappa-1}, \end{cases}$$

und es gilt

$$(9) \quad p = A' b_1 b_2 \dots b_m \mp 1 = A' \prod_{\kappa} c_{4\kappa-2} c_{4\kappa-1} \mp 1.$$

Beweis. Die Richtigkeit von (7) wurde bereits oben erkannt.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(10) \quad g(c_\nu) h(c_\nu) = \pm p.$$

Alle $g(c_\nu)$ und $h(c_\nu)$ können daher nur die vier Werte $+1$, -1 , $+p$, $-p$ besitzen, und die Stellen c_ν können hiernach in vier Sorten eingeteilt werden, derart daß

$$(11) \quad k \text{ Stellen mit } g(c_\nu) = +1, \quad h(c_\nu) = \pm p,$$

$$(12) \quad l \text{ Stellen mit } g(c_\nu) = -1, \quad h(c_\nu) = \mp p,$$

$$(13) \quad r \text{ Stellen mit } g(c_\nu) = +p, \quad h(c_\nu) = \pm 1,$$

$$(14) \quad s \text{ Stellen mit } g(c_\nu) = -p, \quad h(c_\nu) = \mp 1$$

existieren. Mit derselben Überlegung wie beim Beweis des Satzes VIII in [4] wobei für $2m \geq 10$ nur der Satz VI gebraucht wird und für $2m=8$ eine speziellere Betrachtung zum Ziele führt, erkennt man, daß nur folgende vier Fälle möglich sind:

$$(a) \quad k = r = m, \quad l = s = 0,$$

$$(b) \quad k = s = m, \quad l = r = 0,$$

$$(c) \quad l = r = m, \quad k = s = 0,$$

$$(d) \quad l = s = m, \quad k = r = 0.$$

Aus (11) bis (14) ergibt sich, daß folgende Polynome in den Fällen (a) bis (d), deren Grad höchstens gleich m ist, an $2m$ Stellen denselben Wert annehmen und daher konstant sein müssen:

$$(a) \quad g(x) \pm h(x) = p + 1,$$

$$(b) \quad g(x) \mp h(x) = -p + 1,$$

$$(c) \quad g(x) \mp h(x) = p - 1,$$

$$(d) \quad g(x) \pm h(x) = -p - 1.$$

Da jedoch nach den zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen die Summe $g(x) + h(x)$ nicht konstant sein kann, so zeigt sich, daß die Fälle (a) und (d) nicht eintreten können, wenn $f(c_\nu) = +p$, und die Fälle (b) und (c) nicht, wenn $f(c_\nu) = -p$ ist. Für $g(x)$ und $h(x)$ bleiben hiernach sowohl im Falle

$f(c_\nu) = +p$ als auch im Falle $f(c_\nu) = -p$ nur zwei Möglichkeiten, die, wie man sich leicht überzeugt, in der Form

$$(15) \quad \begin{cases} g(x) = A'(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) + \varepsilon \\ \quad \quad = A'(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m) \mp \varepsilon p, \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} h(x) = A'(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \pm \varepsilon p \\ \quad \quad = A'(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m) - \varepsilon \end{cases}$$

zusammengefaßt werden können, wobei $\varepsilon = +1$ oder -1 sein kann.

Unter den a_μ und b_μ ist nach (4) ein Wert gleich Null. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß bei $g(x)$ und $h(x)$ die Benennungen so gewählt sind, daß $a_1 = c_1 = 0$ ist und die a_μ und b_μ nach wachsender Größe geordnet sind:

$$(17) \quad 0 = a_1 < a_2 < \dots < a_m,$$

$$(18) \quad 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m.$$

Für das Polynom (15) folgt an der Stelle $x=0$ aus (17)

$$(19) \quad \varepsilon = (-1)^m A' b_1 b_2 \dots b_m \mp \varepsilon p,$$

d.h.

$$(20) \quad p = \pm (-1)^m \varepsilon A' b_1 b_2 \dots b_m \mp 1.$$

Da aber p positiv ist, erhält man aus (20) und (18)

$$(21) \quad \varepsilon = \pm (-1)^m$$

und demnach

$$(22) \quad p = A' b_1 b_2 \dots b_m \mp 1.$$

Wegen (15), (16) und (21) haben also die Faktoren von $f(x)$ die Form (5) und (6).

Als nächstes betrachte man die Ableitung des Polynoms $g(x)$, die ein Polynom $(m-1)$ -ten Grades ist. Die Nullstellen seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$. Da $g(x)$ an allen Stellen a_μ denselben Wert annimmt, muß zwischen je zwei aufeinanderfolgenden a ein ξ liegen. Dasselbe gilt für je zwei aufeinanderfolgende b . Daher erhält man wegen (17) und (18)

$$(23) \quad 0 = a_1 < \xi_1 < a_2 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-1} < a_m,$$

$$(24) \quad 0 < b_1 < \xi_1 < b_2 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-1} < b_m.$$

Ferner ist zu bemerken, daß

$$(25) \quad \begin{cases} g(x) \mp g(a_1) = g(a_2) = \dots = g(a_m) & \text{für } x \mp a_\mu, \\ g(x) \mp g(b_1) = g(b_2) = \dots = g(b_m) & \text{für } x \mp b_\mu \end{cases}$$

ist, da $g(x)$ vom Grade m ist.

Für die Lage von ξ_1 ergibt sich aus (23) und (24) notwendig

$$a_1 < b_1 < \xi_1.$$

Die Werte, die $g(x)$ im Intervall $a_1 \leq x \leq \xi_1$ annimmt, muß es aus Stetigkeitsgründen auch im Intervall $\xi_1 \leq x \leq a_2$ annehmen, und daher muß wegen (25)

$$\xi_1 < b_2 < a_2 < \xi_2$$

sein. Dieselbe Schlußweise, angewandt auf die Intervalle $b_2 \leq x \leq \xi_2$ und $\xi_2 \leq x \leq b_3$, liefert

$$\xi_2 < a_3 < b_3 < \xi_3.$$

Setzt man diese Betrachtung fort, so bekommt man als Verteilung der Stellen a_μ und b_μ :

$$(26) \quad a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < b_4 < a_4 < \dots$$

Der Vergleich von (26) mit (4) ergibt daher die Beziehungen (8).

Aus (22) und (8) erkennt man schließlich die Richtigkeit von (9).

Damit ist Satz IX vollständig bewiesen.

4

Die Tatsache, daß die Differenz der Polynome (5) und (6) eine Konstante ist, hat zur Folge, daß auch die beiden Polynome

$$(27) \quad G(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$$

und

$$(28) \quad H(x) = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m)$$

sich nur um eine Konstante unterscheiden. Unter Voraussetzung der in (17) angenommenen Normierung $a_1 = 0$ folgt aus (5) und (9)

$$(29) \quad H(x) - (-1)^m b_1 b_2 \dots b_m = G(x).$$

Hat man umgekehrt zwei Polynome $G(x)$ und $H(x)$ von der Form (27) und (28) mit lauter voneinander verschiedenen ganzzahligen Nullstellen, derart daß $G(x) - H(x)$ konstant ist, so gehören dazu unendlich viele Polynome $f(x)$ der Form (1), die reduzibel sind. Denn wenn es Polynome $G(x)$ und $H(x)$ der verlangten Art gibt, so kann man durch eine lineare Transformation von x und geeignete Wahl der Bezeichnungen erreichen, daß die Stellen a_μ und b_μ die Bedingungen (17) und (18) erfüllen. Dies sei also von vornherein für (27) und (28) angenommen. Wählt man dann A' so, daß $A' b_1 b_2 \dots b_m \mp 1$ eine Primzahl p wird, was nach dem Satz über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression auf unendlich viele Arten möglich ist, so haben die Polynome

$$(30) \quad f(x) = A'^2 G(x) H(x) \pm p$$

die gewünschte Eigenschaft. Die Frage nach der Existenz von reduziblen Polynomen (1) ist also gleichbedeutend mit der Frage nach der Existenz von

Polynomen (27) und (28), die nur in ihren absoluten Gliedern voneinander verschieden sind, d. h. mit der Frage nach der Existenz von Systemen ganzer rationaler Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m$ und $b_1, b_2, \dots, b_m$, deren erste $m-1$ elementarsymmetrischen Funktionen übereinstimmen. Auf Grund der NEWTONSchen Relationen, die zwischen den elementarsymmetrischen Funktionen und den Potenzsummen von Größen bestehen, ist diese Frage aber gleichwertig mit der Aufgabe, Systeme ganzer rationaler Zahlen a_μ und b_μ zu finden, deren erste $m-1$ Potenzsummen übereinstimmen:

$$(31) \quad a_1^k + a_2^k + \dots + a_m^k = b_1^k + b_2^k + \dots + b_m^k \quad (k = 1, 2, \dots, m-1).$$

Für das Gleichungssystem (31) wird auch kurz die Schreibweise

$$(32) \quad a_1, a_2, \dots, a_m \stackrel{m-1}{=} b_1, b_2, \dots, b_m$$

verwendet.

Die Aufgabe, ganzzahlige Lösungen des Gleichungssystems

$$(33) \quad a_1, a_2, \dots, a_m \stackrel{l}{=} b_1, b_2, \dots, b_m$$

zu finden, wobei l eine Zahl unterhalb m ist, hat nun, worauf DORWART [7] aufmerksam machte, unabhängig von ihrem Zusammenhang mit der Frage nach der Reduzibilität der Polynome (1) seit langem zahlreiche Bearbeiter gefunden, die sich mit ihr teils wegen ihrer Kuriosität, teils wegen ihres Zusammenhanges mit anderen Aufgaben, wie z. B. der Aufstellung schnell konvergierender Reihen zur numerischen Berechnung von Logarithmen beschäftigten. Für dieses Problem hat sich nach einem Vorschlag von L. E. DICKSON der Name „TARRY-ESCOTTsches Problem“ eingebürgert. In dem Fall $l = m-1$, der für die hier angestellten Betrachtungen von Interesse ist, pflegt man von dem „idealen TARRY-ESCOTTschen Problem“ zu sprechen. Literaturangaben hierüber sind an den unter [8] zitierten Stellen zu finden.

Der Engländer ESCOTT [9] und der Franzose TARRY [10a] gaben 1910 bzw. 1912 ein Verfahren an, um aus zwei Systemen von Zahlen, deren erste l elementarsymmetrischen Funktionen oder Potenzsummen übereinstimmen, zwei Systeme von Zahlen zu gewinnen, deren erste $l+1$ elementarsymmetrischen Funktionen oder Potenzsummen übereinstimmen. Die Formulierung bei ESCOTT, die in ähnlicher Gestalt allerdings schon fast 100 Jahre vorher von KNIGHT [11] ausgesprochen wurde, lautet:

X. Wenn für zwei Polynome $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die ersten r Koeffizienten, beginnend mit dem höchsten, übereinstimmen, so stimmen für die Polynome $f_1(x) f_2(x+d)$ und $f_2(x) f_1(x+d)$ bei beliebigem d die ersten $r+1$ Koeffizienten überein.

TARRY spricht den Satz so aus:

XI. Wenn für $a_1, \dots, a_s$ und $b_1, \dots, b_s$ die ersten l Potenzsummen übereinstimmen, so stimmen für $a_1, \dots, a_s, b_1+d, \dots, b_s+d$ und $b_1, \dots, b_s, a_1+d, \dots, a_s+d$ die ersten $l+1$ Potenzsummen überein.

Der Satz XI kann dazu benutzt werden, um fortlaufend Zahlensysteme zu konstruieren, bei denen immer mehr Potenzsummen übereinstimmen.

Hierbei wird es sich jedoch im allgemeinen nur um Lösungen des allgemeinen, nicht des idealen TARRY-ESCOTTschen Problems handeln. Nur unter besonders günstigen Umständen, nämlich dann, wenn genügend viele Differenzen $a_\kappa - a_\lambda$ und $b_\kappa - b_\lambda$ den Wert d besitzen, wird man zu einer idealen Lösung gelangen. So ergibt sich z.B. für $m=7$ eine Lösung von (32), wenn man von

$$\begin{aligned} & 0, 7, 11, 17, 18, 24, 28, 35 \\ & \stackrel{1}{=} 1, 8, 12, 15, 20, 23, 27, 34 \end{aligned}$$

ausgeht und den TARRYschen Satz der Reihe nach mit $d=7, 11, 13, 17, 19$ anwendet. Das führt auf

$$\begin{aligned} & 0, 18, 27, 58, 64, 89, 101 \\ & \stackrel{6}{=} 1, 13, 38, 44, 75, 84, 102. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel findet sich schon bei ESCOTT ([9], S. 152; vgl. auch [8e], S. 334).

Für $m=8$ erhält man eine Lösung, wenn man mit

$$0, 8 \stackrel{1}{=} 3, 5$$

beginnt und Satz XI mit $d=1, 2, 7, 8, 11, 13$ anwendet. Dann entsteht

$$\begin{aligned} & 0, 4, 9, 23, 27, 41, 46, 50 \\ & \stackrel{7}{=} 1, 2, 11, 20, 30, 39, 48, 49. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel ist ebenfalls schon alt; TARRY fand es als erster ([10b]; vgl. auch [8b], S. 616).

Später wurden noch für $m=9$ und $m=10$ Lösungen von (32) gefunden. A. LETAC gab 1942 zwei Zahlenbeispiele für den Fall $m=9$ an und zeigte einen Weg, der zu unendlich vielen Lösungen für den Fall $m=10$ führt (vgl. [8f], S. 48, 54, 56). Für $m > 10$ sind bisher keine Lösungen von (32) in ganzen rationalen Zahlen bekannt.

5

Aus (27), (28) und (29) erhält man sofort weitere Bedingungen, die die Zahlen a_μ und b_μ notwendig erfüllen müssen, wenn sie eine Lösung des idealen TARRY-ESCOTTschen Problems ergeben sollen. Ist q eine Primzahl, die in einer der Zahlen $b_1, b_2, \dots, b_m$ aufgeht, so werden wegen (29) die Polynome $G(x)$ und $H(x)$ mod q einander identisch. Daher müssen die Nullstellen von (27) und (28) übereinstimmen. Es gilt also folgender Satz, der in etwas umständlicherer Form schon in [6], S. 148 bewiesen ist:

XII. Ist q Primteiler einer der Zahlen b_μ , so stimmen die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m$ und $b_1, b_2, \dots, b_m$ mod q überein.

Folgerungen aus diesem Satz, auf die hier nicht eingegangen werden soll, finden sich in [6].

Man kann auch, wie in [6] gezeigt ist, Primzahlen angeben, die als Teiler der b_μ vorkommen müssen. Zum Beispiel ist sicher jede in m nicht enthaltene

Primzahl q unterhalb m Teiler eines b_μ und muß in dem Produkt $b_1 b_2 \dots b_m$ mindestens in der $\left[\begin{smallmatrix} m+q-1 \\ q \end{smallmatrix} \right]$ -ten Potenz aufgehen. Von Nutzen ist beim Beweis dieses Satzes die Betrachtung der m -reihigen quadratischen Matrix

$$(34) \quad (a_\kappa - a_\lambda) \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, m).$$

Da aus (27), (28) und (29) für jedes a_κ und jedes b_λ ($\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, m$)

$$(35) \quad \begin{cases} H(a_\kappa) = (a_\kappa - b_1)(a_\kappa - b_2) \dots (a_\kappa - b_m) = (-1)^m b_1 b_2 \dots b_m, \\ G(b_\lambda) = (b_\lambda - a_1)(b_\lambda - a_2) \dots (b_\lambda - a_m) = -(-1)^m b_1 b_2 \dots b_m \end{cases}$$

folgt, so wird in der Matrix (34) das Produkt aus den Elementen jeder Zeile gleich $(-1)^m b_1 b_2 \dots b_m$ und das Produkt aus den Elementen jeder Spalte gleich $-b_1 b_2 \dots b_m$ (vgl. [6], S. 151 und [8d]). Das ideale TARRY-ESCOTTSCHE Problem kann daher auch so formuliert werden:

Es ist eine m -reihige quadratische Matrix $(n_{\kappa\lambda})$ mit folgenden Eigenschaften gesucht:

1. Die Zahlen der ersten Zeile sind negative ganze rationale Zahlen

$$n_{1\lambda} = -b_\lambda < 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m).$$

2. Die übrigen Zeilen entstehen aus der ersten Zeile durch Addition positiver Zahlen $a_2, a_3, \dots, a_m$:

$$n_{\kappa\lambda} = a_\kappa - b_\lambda \quad (\kappa = 2, 3, \dots, m).$$

3. Die Produkte $n_{\kappa 1} n_{\kappa 2} \dots n_{\kappa m}$ haben für jedes $\kappa = 1, 2, \dots, m$ denselben Wert $(-1)^m N$.

4. Die Produkte $n_{1\lambda} n_{2\lambda} \dots n_{m\lambda}$ haben für jedes $\lambda = 1, 2, \dots, m$ denselben Wert $-N$.

6

Da es bisher nicht gelungen ist zu entscheiden, ob das ideale TARRY-ESCOTTSCHE Problem (32) für beliebiges m in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist, und da die Ausführungen in Abschnitt 5 zeigen, daß Zahlen, die eine solche Lösung liefern, eine ganze Reihe von Bedingungen notwendig erfüllen müssen, scheint es nicht ohne Interesse, die Frage zu stellen, ob das Gleichungssystem (32) in anderen als ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.

Trivial ist der Fall, daß für die a_μ und b_μ beliebige reelle oder komplexe Zahlen zugelassen werden. Dann ist (32) für jedes m lösbar. Man braucht nur zwei Polynome m -ten Grades zu nehmen, deren Differenz konstant ist. Die Nullstellen dieser beiden Polynome ergeben eine Lösung von (32).

Auch daß (32) für jedes m Lösungen in reellen Zahlen zuläßt, erkennt man sofort. Es seien nämlich $a_1, a_2, \dots, a_m$ reelle Zahlen, die (17) erfüllen. Mit diesen Größen bilde man nach (27) das Polynom $G(x)$. Die Nullstellen der Ableitung von $G(x)$ sind voneinander verschiedene reelle Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$, und es ist, wenn die ξ_ν nach wachsender Größe geordnet sind,

$$\operatorname{sgn} G(\xi_{2\kappa-1}) = (-1)^{m-1} \left(\kappa = 1, 2, \dots, \left[\frac{m}{2} \right] \right).$$

Setzt man

$$\gamma = \min_x |G(\xi_{2^{x-1}})|,$$

so sind die Nullstellen jedes Polynoms $G(x) + (-1)^m C$ mit $0 < C < \gamma$ voneinander verschiedene positive reelle Zahlen $b_1, b_2, \dots, b_m$, und die Zahlen a_μ und b_μ sind eine Lösung von (32).

Man sieht übrigens wie beim Beweis des Satzes IX, daß der Größe nach geordnete reelle Zahlen a_μ und b_μ , die Lösung von (32) sind, die Ungleichungen (26) erfüllen müssen.

Als letztes soll die Frage betrachtet werden, ob das Kongruenzensystem

$$(36) \quad a_1, a_2, \dots, a_m \equiv b_1, b_2, \dots, b_m \pmod{M}$$

nichttriviale Lösungen besitzen kann, d.h. solche, bei denen die b_μ nicht bloß eine Permutation der $a_\mu \pmod{M}$ darstellen. Nach Satz XII erhält man jedenfalls aus einer Lösung des idealen TARRY-ESCOTTschen Problems in ganzen rationalen Zahlen a_μ, b_μ keine nichttriviale Lösung des zugehörigen Problems mod M , wenn M Primteiler einer der Zahlen b_μ ist.

Beispiele, die zeigen, daß (36) für ungerade Primzahlmoduln $M = p$ Lösungen besitzen kann, sind folgende:

$$1. \quad m = p - 1, \quad a_\mu \equiv \mu, \quad b_\mu \equiv 0 \pmod{p}, \quad \mu = 1, 2, \dots, p - 1,$$

also:

$$(37) \quad 1, 2, \dots, p - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Summe der Elemente der linken Seite von (37) ist nämlich durch p teilbar, und die zweite, dritte, ..., $(p-2)$ -te Potenz der Elemente ergibt stets nur eine Permutation dieser Elemente. Man kann auch so schließen: Die Polynome

$$(x-1)(x-2)\dots(x-p+1) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p} \quad \text{und} \quad x^{p-1}$$

unterscheiden sich mod p nur um eine Konstante.

$$2. \quad m = \frac{p-1}{2}, \quad a_\mu \equiv r_\mu, \quad b_\mu \equiv 0 \pmod{p}, \quad \mu = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2},$$

wobei die r_μ ein vollständiges System quadratischer Reste mod p bilden. Es ist

$$(38) \quad r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p},$$

da die Polynome

$$\prod_{\mu} (x - r_\mu) \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p} \quad \text{und} \quad x^{\frac{p-1}{2}}$$

sich mod p nur um eine Konstante unterscheiden.

$$3. \quad m = \frac{p-1}{2}, \quad a_\mu \equiv n_\mu, \quad b_\mu \equiv 0 \pmod{p}, \quad \mu = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2},$$

wobei die n_μ ein vollständiges System quadratischer Nichtreste mod p bilden. Es ist

$$(39) \quad n_1, n_2, \dots, n_{\frac{p-3}{2}} \equiv 0 \pmod{p},$$

wie die Betrachtung der Polynome

$$\prod_{\mu} (x - n_{\mu}) \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \pmod{p} \quad \text{und} \quad x^{\frac{p-1}{2}}$$

zeigt.

4. Aus (38) und (39) folgt

$$(40) \quad r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{2}} \equiv n_1, n_2, \dots, n_{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

d. h. die Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ lassen sich so in zwei Mengen von je $m = \frac{p-1}{2}$ Zahlen zerlegen, daß eine Lösung des idealen TARRY-ESCOTTschen Kongruenzsystems (36) entsteht.

5. Für zusammengesetzte Moduln M sind entsprechende Schlüsse nicht zulässig. Man habe z. B. zwei Polynome $G(x)$ und $H(x)$ vom Grade m mit dem höchsten Koeffizienten 1, deren Differenz mod M eine Konstante ist, und man kenne für $G(x)$ und $H(x)$ je m Nullstellen $a_1, a_2, \dots, a_m$ und $b_1, b_2, \dots, b_m$ mod M . Dann müssen nicht notwendig die Zahlen a_μ und b_μ Lösung eines idealen TARRY-ESCOTTschen Kongruenzsystems (36) sein. Denn die Produkte $\prod_{\mu} (x - a_\mu)$ und $\prod_{\mu} (x - b_\mu)$ brauchen nicht notwendig mod M mit $G(x)$ und $H(x)$ übereinzustimmen. Ein Beispiel stellen etwa die Polynome

$$G(x) = x^{\varphi(M)} - 1, \quad H(x) = x^{\varphi(M)}, \quad \varphi(M) = \text{EULERSche Funktion},$$

dar. Die zu M teilerfremden Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(M)}$ eines vollständigen Restsystems mod M sind die Nullstellen von $G(x)$. Die Zahlen a_μ und $b_1 = b_2 = \dots = b_{\varphi(M)} = 0$ ergeben im allgemeinen aber keine Lösung von (36) mit $m = \varphi(M)$.

Man darf auch nicht umgekehrt aus der Tatsache, daß für zwei Zahlensysteme $a_1, a_2, \dots, a_m$ und $b_1, b_2, \dots, b_m$ die ersten, zweiten, ..., $(m-1)$ -ten Potenzsummen mod M übereinstimmen, den Schluß ziehen, daß sich die Polynome $\prod_{\mu} (x - a_\mu)$ und $\prod_{\mu} (x - b_\mu)$ nur um eine Konstante mod M unterscheiden. Denn die NEWTONschen Relationen liefern für einen zusammengesetzten Modul aus dem Übereinstimmen der Potenzsummen der a_μ und b_μ nicht notwendig das Übereinstimmen der entsprechenden elementarsymmetrischen Funktionen. Als Beispiel sei angeführt, daß für

$$(41) \quad a_\mu \equiv 1, \quad b_\mu \equiv 0 \pmod{M} \quad (\mu = 1, 2, \dots, M)$$

alle Potenzsummen mod M einander kongruent werden, daß die Zahlen (41) also sicher eine Lösung von (36) mit $m = M$ ergeben. Die Polynome $(x-1)^M$ und x^M unterscheiden sich jedoch mod M , wenn M keine Primzahl ist, nicht bloß um eine Konstante.

Literatur.

- [1] (a) SCHUR, I.: Aufgabe 226. Arch. Math. u. Phys. (3) **13**, 367 (1908). — (b) FLÜGEL, W.: Lösung der Aufgabe 226. Arch. Math. u. Phys. (3) **15**, 271—272 (1909). — (c) PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II. Berlin 1925. VIII. Abschnitt, Aufg. 121 und 122. — [2] BRAUER, A., u. R. BRAUER: Über Irreduzibilitätskriterien von I. SCHUR und G. PÓLYA. Math. Z. **40**, 242—265 (1935). — [3] PÓLYA, G.: Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie. Jahresber. Dtsch. Math.-Vereinigung **28**, 31—40, insbesondere 34—36 (1919). — [4] BRAUER, A.: Bemerkungen zu einem Satze von Herrn G. PÓLYA. Jahresber. Dtsch. Math.-Vereinigung **43**, 124—129 (1934). — [5] DORWART, H. L., and O. ORE: Criteria for the irreducibility of polynomials. Ann. of Math. **34**, 81—94 (1933). — [6] SCHULZ, W.: Reduzibilität, Irreduzibilität und Affektfreiheit bei gewissen Klassen von Polynomen. Schriften des Math. Sem. und des Inst. f. angew. Math. Universität Berlin **3**, 117—154, insbesondere 144—154 (1937). — [7] DORWART, H. L.: Concerning certain reducible polynomials. Duke Math. J. **1**, 70—73 (1935). — [8] (a) DICKSON, L. E.: History of the Theory of Numbers, Bd. II, S. 705—713. Washington 1920. — (b) DORWART, H. L., and O. E. BROWN: The Tarry-Escott problem. Amer. Math. Monthly **44**, 613—626 (1937). — (c) CHERNICK, J.: Ideal solutions of the Tarry-Escott problem. Amer. Math. Monthly **44**, 626—633 (1937). — (d) BURCHNALL, J. L., and T. W. CHAUNDY: A type of „magic square“ in Tarry's problem. Quart. J. of Math. (Oxford series) **8**, 119—130 (1937). — (e) HARDY, G. H., and E. M. WRIGHT: An Introduction to the Theory of Numbers, S. 328—331. Oxford 1938. — (f) GLODEN, A.: Mehrgradige Gleichungen. Groningen 1944. — (g) DORWART, H. L.: Sequences of ideal solutions in the Tarry-Escott problem. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 381—391 (1947). — (h) GLODEN, A., et G. PALAMÀ: Bibliographie des multigrades avec quelques notices biographiques. Luxembourg 1948. — [9] ESCOTT, E. B.: Logarithmic series. Quart. J. of Math. **41**, 141—156 (1910). — [10] (a) TARRY, G.: Interméd. des Math. **19**, 219—222 (1912). — (b) Interméd. des Math. **20**, 68—70 (1913). — [11] KNIGHT, T.: On the construction of logarithmic tables. Phil. Trans. Royal Soc. London **117**, 217—233 (1817). Vgl. hierzu [8h], S. 21.

Braunschweig, Gneisenaustraße 1.

(Eingegangen am 12. Januar 1955.)

Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen.

(Zum 80. Geburtstag von I. SCHUR.)

Von

ROBERT FRUCHT.

Einleitung.

In zwei klassischen Arbeiten [3], [4]¹⁾ hat I. SCHUR eine Theorie der Darstellung endlicher Gruppen durch *gebrochene* lineare Substitutionen — oder wie man unter Verwendung eines geometrischen Ausdruckes kürzer sagen kann, durch Kollineationen — entwickelt. Auf eine Zusammenfassung dieser Theorie können wir hier verzichten, da SCHUR selbst eine solche Zusammenfassung in einer späteren Arbeit ([5], § 1) gegeben hat, in der er seine Theorie auf die symmetrische und die alternierende Gruppe angewendet hat. Außerdem ist für das Verständnis der vorliegenden Arbeit eine genauere Kenntnis der SCHURschen Darstellungstheorie nicht erforderlich²⁾, da von ihr kein Gebrauch gemacht werden soll. In der Tat wäre es noch bei Lebzeiten SCHURS Wunsch gewesen, daß einer seiner Schüler eine Vereinfachung der Theorie unternommen hätte; mir ist aber nur eine Arbeit der Herren ASANO und SHODA [1] bekannt, in der zwei Sätze aus der SCHURschen Theorie etwas einfacher bewiesen werden. Da es also scheint, daß eine wesentliche Vereinfachung der SCHURschen Darstellungstheorie bisher nicht gelungen ist, habe ich mir die Frage vorgelegt, ob es nicht wenigstens spezielle Klassen endlicher Gruppen gibt, bei denen eine einfachere Lösung des Problems der Darstellung durch Kollineationen möglich ist.

Hierzu gehören nun in erster Linie die Abelschen Gruppen endlicher Ordnung, für die im § 2 der vorliegenden Arbeit gezeigt werden soll, daß dieses Darstellungsproblem direkt in Angriff genommen werden kann, ohne die viel tiefer liegende allgemeine SCHURsche Theorie heranzuziehen, wie dies noch in [2] geschehen war; im Anschluß daran soll in § 3 die Frage nach der Darstellung Abelscher Gruppen endlicher Ordnung durch *reelle* Kollineationen behandelt werden.

Um endlich auch ein Beispiel für nicht-Abelsche Gruppen zu geben, die sich ohne Heranziehung der SCHURschen Darstellungstheorie einfach erledigen lassen, sollen in § 4 noch die Diedergruppen behandelt werden.

¹⁾ Hinweise in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

²⁾ Die nötigen Definitionen über Darstellungen durch Kollineationen sind im § 1 zusammengestellt.

§ 1. Definitionen.

Ist eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Elementen E (= Einheitsselement), $A, B, \dots$ gegeben, so sprechen wir von einer *Darstellung* dieser Gruppe durch *Kollineationen* vom Grade f , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedem Element G von $\mathfrak{G}$ entspricht eine f -reihige quadratische Matrix $M(G)$ mit reellen oder komplexen Zahlen als Elementen und mit von Null verschiedener Determinante.

2. Für je zwei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Elemente A, B aus $\mathfrak{G}$ existiert eine reelle oder komplexe Zahl $\lambda_{A,B}$ derart, daß

$$(1.1) \quad M(AB) = \lambda_{A,B} M(A) \cdot M(B)$$

gilt.

Der einzige Unterschied gegenüber der von FROBENIUS entwickelten klassischen Theorie der Darstellung durch ganze lineare homogene Substitutionen besteht in der Hinzufügung der Zahlenfaktoren $\lambda_{A,B}$ in (1.1); wir werden daher sagen, daß eine Darstellung durch Kollineationen gleichzeitig eine Darstellung durch ganze lineare homogene Substitutionen ist, wenn alle Zahlenfaktoren $\lambda_{A,B} = 1$ sind oder wenn durch Multiplikation der Matrizen $M(G)$ mit geeigneten Zahlenfaktoren λ_G erreicht werden kann, daß $\lambda_{A,B} = 1$ ausfällt für alle Elemente A, B von $\mathfrak{G}$.

In der Tat kann offenbar bei einer Darstellung durch Kollineationen jede Matrix $M(G)$ jederzeit mit einem ganz beliebigen Zahlenfaktor $\lambda_G \neq 0$ multipliziert werden (daher der Name Kollineationen!), weil dies nur eine unwesentliche Abänderung der Zahlenfaktoren $\lambda_{A,B}$ in (1.1) zur Folge hat. Wir nennen diese Operation eine „*Umnormierung*“ und werden von dieser Möglichkeit mehrfach Gebrauch machen, da sie uns gestattet, die Matrizen einer Darstellung gegebenenfalls noch geeignet zu „normieren“. So können wir z.B. durch Umnormierung stets erreichen, daß $M(E)$ gleich der f -reihigen Einheitsmatrix wird, die wir mit I_f bezeichnen wollen:

$$(1.2) \quad M(E) = I_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix},$$

was im folgenden immer vorausgesetzt werden soll. Zum Beweise brauchen wir nur festzustellen, daß sich aus (1.1) für $A = B = E$ die Tatsache ergibt, daß $M(E)$ der mit $1/\lambda_{E,E}$ multiplizierten f -reihigen Einheitsmatrix gleich sein muß.

Wie üblich nennen wir jede solche Matrix der Form λI_f (mit einem von Null verschiedenen Zahlenfaktor λ) eine *Multiplikation*; nach dem soeben Gesagten sind solche Multiplikationen bei Darstellungen durch Kollineationen als von der Einheitsmatrix nicht wesentlich verschieden anzusehen. Daher interessieren bei Kollineationen nur Darstellungen mit $f > 1$.

Wir werden eine Darstellung durch Kollineationen *getreu* nennen, wenn zwei verschiedenen Elementen von $\mathfrak{G}$ stets zwei wesentlich verschiedene Matrizen entsprechen (d.h. zwei Matrizen, die sich nicht nur durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden); mit anderen Worten: eine Darstellung durch Kollineationen ist *getreu*, wenn eine Matrizengleichung

$$(1.3) \quad M(A) = \lambda M(B)$$

unmöglich ist für $A \neq B$. Ein häufig bequemerer Kriterium gibt der unmittelbar aus (1.1) und (1.2) folgende

Satz 1.1. *Eine Darstellung einer endlichen Gruppe durch Kollineationen ist dann und nur dann getreu, wenn keinem von E verschiedenen Gruppenelement eine Multiplikation zugeordnet ist.*

Die Äquivalenz zweier Darstellungen wird ähnlich wie in der klassischen Substitutionstheorie definiert: Zwei Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen, $M(G)$ und $N(G)$, heißen *äquivalent*, wenn es eine f -reihige Matrix P und Zahlen $\lambda_E, \lambda_A, \lambda_B, \dots$ derart gibt, daß für alle Elemente G von $\mathfrak{G}$ die Matrizengleichung:

$$(1.4) \quad N(G) = \lambda_G \cdot P^{-1} \cdot M(G) \cdot P$$

erfüllt ist. (Der Unterschied gegenüber der Definition bei ganzen linearen homogenen Substitutionen besteht natürlich im Faktor λ_G auf der rechten Seite.) Äquivalente Darstellungen werden als nicht wesentlich verschieden betrachtet.

Wie in der klassischen Darstellungstheorie heißt auch eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen *irreduzibel*, wenn es keine zu ihr äquivalente Darstellung $M(G)$ gibt, bei der alle Matrizen die Form

$$(1.5) \quad M(G) = \begin{pmatrix} M_1(G) & 0 \\ 0 & M_2(G) \end{pmatrix}$$

haben, wo $M_1(G)$ eine f_1 -reihige quadratische Matrix und $M_2(G)$ eine f_2 -reihige quadratische Matrix ist, während die beiden Nullen rechteckige, nur aus Nullen bestehende Matrizen andeuten. (f_1 und f_2 müssen vom betrachteten Gruppenelement G unabhängig sein!)

Endlich wollen wir noch eine Definition einführen, die sich bei SCHUR noch nicht findet, die sich aber als zweckmäßig erweist. Wir wollen eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen $M(G)$ dann und nur dann eine *wesentliche* Darstellung nennen, wenn es keine reellen oder komplexen Zahlen $\lambda_E, \lambda_A, \lambda_B, \dots$ derart gibt, daß die Matrizen $\lambda_G M(G)$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare homogene Substitutionen liefern. Offenbar gilt dann:

Satz 1.2. *Eine Darstellung durch Kollineationen ist dann und nur dann wesentlich, wenn bei jeder Umnormierung der Matrizen $M(G)$ mindestens eine der durch (1.1) definierten Zahlen $\lambda_{A,B}$ von 1 verschieden ist.*

Gruppen, die keine wesentlichen irreduziblen Darstellungen durch Kollineationen zulassen, heißen bei SCHUR *abgeschlossen*.

§ 2. Allgemeine Theorie der Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe endlicher Ordnung, so können wir sie stets als direktes Produkt zyklischer Gruppen geschrieben denken:

$$(2.1) \quad \mathfrak{A} = \{A_1\} \times \{A_2\} \times \cdots \times \{A_n\},$$

wobei, damit n möglichst gering ausfällt, für die Ordnungen (oder Perioden) $a_1, a_2, \dots, a_n$ der erzeugenden Elemente $A_1, A_2, \dots, A_n$ angenommen werden kann, daß jede durch die folgende teilbar ist.

Die Gruppe (2.1) ist dann vollständig definiert durch die n Ordnungsrelationen:

$$(2.2) \quad A_i^{a_i} = E, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und wenn $n > 1$ ist, durch die $\binom{n}{2}$ Vertauschbarkeitsrelationen:

$$(2.3) \quad A_j A_i = A_i A_j, \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

wobei noch vorausgesetzt wird, daß die $n-1$ Quotienten:

$$(2.4) \quad \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

ganze Zahlen sein sollen.

Bei einer Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen genügt es dann wegen (1.1), die den n erzeugenden Elementen A_i zugeordneten Matrizen $M(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) anzugeben, denn durch Umnormierung können wir stets erreichen, daß irgendeinem Gruppenelement $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$ die Matrix:

$$(2.5) \quad M(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}) = \{M(A_1)\}^{\alpha_1} \cdot \{M(A_2)\}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \{M(A_n)\}^{\alpha_n} \quad (0 \leq \alpha_i < a_i)$$

entsprechen möge.

Wegen (1.1) und (2.2) müssen die Matrizen $\{M(A_i)\}^{a_i}$ Multiplikationen sein; durch Umnormierung können wir sogar erreichen, daß:

$$(2.6) \quad \{M(A_i)\}^{a_i} = I_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wird. Diese Normierung hat übrigens zur Folge, daß

$$(2.7) \quad M(A_i^{-1}) = \{M(A_i)\}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wird; denn wegen (2.2) und (2.5) wird

$$M(A_i^{-1}) = M(A_i^{a_i-1}) = \{M(A_i)\}^{a_i-1} = \{M(A_i)\}^{a_i} \cdot \{M(A_i)\}^{-1} = \{M(A_i)\}^{-1}.$$

Satz 2.1. *Zyklische Gruppen besitzen überhaupt keine wesentlichen Darstellungen durch Kollineationen³⁾.*

In der Tat ergibt sich aus (2.6) im Falle $n=1$, daß bei der von uns vorgenommenen Normierung jede Darstellung durch Kollineationen in eine Darstellung durch ganze lineare homogene Substitutionen übergeht.

³⁾ In der SCHURschen Terminologie lautet Satz 2.1: „Zyklische Gruppen sind abgeschlossen.“ Er findet sich in dieser Formulierung in [3], S. 50.

Da durch Satz 2.1 also das Darstellungsproblem für zyklische Gruppen völlig auf das der Darstellung durch ganze lineare Substitutionen zurückgeführt ist, können wir im folgenden $n \geq 2$ voraussetzen und dann folgenden Satz aussprechen:

Satz 2.2. *Dafür, daß irgendwelche n Matrizen $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_n)$, die den Bedingungen (2.6) genügen, auf Grund von (2.5) eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen liefern, ist notwendig und hinreichend die Existenz von $\binom{n}{2}$ reellen oder komplexen Zahlen λ_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$), mit denen die folgenden Matrixgleichungen erfüllt sind:*

$$(2.8) \quad M(A_i) \cdot M(A_j) = \lambda_{ij} M(A_j) \cdot M(A_i) \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

In der Tat erfüllen die Matrizen $M(A_i)$ wegen (2.6) die Ordnungsrelationen (2.2) und wegen (2.8) — bis auf laut (1.1) zulässige Zahlenfaktoren λ_{ij} — die Vertauschbarkeitsrelationen (2.3).

Satz 2.3. λ_{ij} muß eine a_j -te Einheitswurzel sein; bei einer wesentlichen Darstellung durch Kollineationen dürfen nicht alle $\lambda_{ij} = 1$ sein.

Beweis. Schreiben wir (2.8) in der Form:

$$(2.9) \quad M(A_j) = \lambda_{ij} \{M(A_i)\}^{-1} \cdot M(A_j) \cdot M(A_i) \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

und erheben wir beide Seiten in die a_j -te Potenz, so ergibt sich wegen (2.6):

$$I_j = \lambda_{ij}^{a_j} \{M(A_i)\}^{-1} \cdot I_j \cdot M(A_i) = \lambda_{ij}^{a_j} \cdot I_j$$

und daher:

$$(2.10) \quad \lambda_{ij}^{a_j} = 1, \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

womit der erste Teil von Satz 2.3 bewiesen ist; der zweite Teil ist eine unmittelbare Folge von (2.8), Satz 1.2 und der Tatsache, daß die λ_{ij} sich nicht ändern, auch wenn wir die Matrizen $M(A_i)$ zwecks Umnormierung mit irgendwelchen Zahlenfaktoren multiplizieren.

λ_{ij} muß übrigens auch eine f -te Einheitswurzel sein, denn wenn wir auf beiden Seiten von (2.9) die Determinanten nehmen und durch die von 0 verschiedene Determinante der Matrix $M(A_j)$ dividieren, ergibt sich:

$$(2.11) \quad \lambda_{ij}^f = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Schreiben wir endlich (2.8) in der Form:

$$(2.12) \quad \{M(A_i)\}^{-1} \cdot \{M(A_j)\}^{-1} \cdot M(A_i) \cdot M(A_j) = \lambda_{ij} \cdot I_f,$$

so können wir Satz 2.2 auch folgendermaßen formulieren:

Satz 2.4. *n den Bedingungen (2.6) genügende Matrizen $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_n)$ liefern dann und nur dann eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen, wenn die $\binom{n}{2}$ „Kommutatoren“ $\{M(A_i)\}^{-1} \cdot \{M(A_j)\}^{-1} \cdot M(A_i) \cdot M(A_j)$ Multiplikationen sind ($1 \leq i < j \leq n$)⁴.*

⁴) Bei einer wesentlichen Darstellung durch Kollineationen muß natürlich mindestens einer dieser Kommutatoren von der Einheitsmatrix I_f verschieden sein.

Andererseits sind nach einem klassischen Satz der Darstellungstheorie die einzigen Matrizen, die mit sämtlichen Matrizen einer *irreduziblen* Substitutionsgruppe vertauschbar sind, Multiplikationen. Es liegt daher nahe, unser Darstellungsproblem dadurch zu lösen, daß man die irreduziblen Darstellungen durch ganze lineare Substitutionen einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{S} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ betrachtet, die folgendermaßen zu definieren ist: Die erzeugenden Elemente H_i sollen den (2.2) analogen Ordnungsrelationen

$$(2.13) \quad H_i^{a_i} = E \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und den (2.3) entsprechenden, aber schwächeren Vertauschbarkeitsbedingungen genügen, daß die $\binom{n}{2}$ Kommutatoren

$$(2.14) \quad C_{ij} = H_i^{-1} H_j^{-1} H_i H_j \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

mit allen Elementen von $\mathfrak{S}$ vertauschbar sein sollen; es genügt natürlich zu verlangen, daß die $n^2(n-1)/2$ Vertauschbarkeitsrelationen:

$$(2.15) \quad H_i C_{jk} = C_{jk} H_i \quad (j < k; i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllt sein sollen.

Genau wie in [2], S. 19, beweist man dann leicht (ohne Heranziehung der SCHURschen Darstellungstheorie), daß $\mathfrak{S}$ eine endliche Gruppe der Ordnung $a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n$ ist.

Wenn nun eine *irreduzible* Darstellung von $\mathfrak{S}$ durch ganze lineare homogene Substitutionen vorliegt, bei der dem Element H von $\mathfrak{S}$ die Matrix $N(H)$ entsprechen möge, so können wir

$$(2.16) \quad M(A_i) = N(H_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

setzen und erhalten auf diese Weise eine *irreduzible* Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen, denn wegen (2.13) ist (2.6) erfüllt, und da definitionsgemäß die C_{ij} invariante Elemente von $\mathfrak{S}$ sind, sind auf Grund des oben zitierten Satzes die Matrizen

$$(2.17) \quad \begin{cases} N(C_{ij}) = \{N(H_i)\}^{-1} \{N(H_j)\}^{-1} N(H_i) N(H_j) \\ \quad = \{M(A_i)\}^{-1} \{M(A_j)\}^{-1} M(A_i) M(A_j) \end{cases}$$

Multiplikationen und somit alle im Satz 2.4 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt. Dieselbe Schlußweise läßt sich anwenden bei einer nicht notwendigerweise irreduziblen Darstellung $N(H)$ von $\mathfrak{S}$ durch ganze lineare homogene Substitutionen, sofern nur bei derselben die $N(C_{ij})$ Multiplikationen sind.

Ist umgekehrt eine (nicht notwendig irreduzible) Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen gegeben, so erfüllen die durch (2.6) normierten Matrizen $M(A_i)$ die Ordnungsrelationen (2.13) für die H_i und als Multiplikationen erfüllen die Kommutatoren (2.12) gewiß die an die Kommutatoren (2.14) gestellten Bedingungen (2.15).

Zusammenfassend können wir daher sagen:

Satz 2.5. *Die Darstellungen von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen können erhalten werden, indem man diejenigen Darstellungen der durch (2.13) und (2.15) definierten abstrakten Gruppe $\mathfrak{H}$ durch ganze lineare homogene Substitutionen aufstellt, bei denen die Kommutatoren (2.14) durch Multiplikationen dargestellt werden, wie dies insbesondere bei irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ der Fall ist, denen natürlich die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen entsprechen.*

Damit haben wir aber für den hier betrachteten Fall Abelscher Gruppen durch ganz elementare Betrachtungen dasselbe Ergebnis erhalten, das für beliebige endliche Gruppen das Ziel der viel tiefer liegenden SCHURschen Darstellungstheorie ist: die irreduziblen Darstellungen durch Kollineationen dadurch zu erhalten, daß man die irreduziblen Darstellungen einer größeren Gruppe, der „Darstellungsgruppe“ in der SCHURschen Terminologie, durch ganze lineare homogene Substitutionen betrachtet. In der Tat ist (abgesehen von der Bezeichnungsweise der erzeugenden Elemente) die durch (2.13) und (2.15) definierte Gruppe $\mathfrak{H}$ mit der ebenfalls $\mathfrak{H}$ heißen den „einfachsten Darstellungsgruppe“ von [2], S. 19 identisch, die dort unter Anwendung der SCHURschen Darstellungstheorie erhalten wurde.

Da dann in den §§ 2 bis 6 von [2] die SCHURsche Theorie selbst nicht mehr herangezogen wird, können wir die weiteren Ausführungen von dort unverändert übernehmen und auf eine Wiederholung der dortigen Untersuchungen und Ergebnisse hier verzichten⁵⁾; statt dessen soll im folgenden § 3 lieber die in [2] nicht behandelte Frage untersucht werden, welche Abelsche Gruppen wesentliche Darstellungen durch *reelle* Kollineationen zulassen.

§ 3. Bedingungen für die Existenz wesentlicher getreuer Darstellungen einer Abelschen Gruppe durch reelle Kollineationen.

Wir wollen nunmehr nach *reellen* Kollineationen fragen, d. h. nach solchen Darstellungen, wo sowohl die Matrizen $M(G)$ nur reelle Elemente besitzen als auch infolgedessen die durch (1.1) definierten Zahlen $\lambda_{A,B}$ alle reell sind.

Jede endliche Gruppe besitzt reelle getreue Darstellungen durch ganze lineare homogene Substitutionen (und daher auch durch Kollineationen); z. B. braucht man nur die der Gruppentafel entsprechende Darstellung durch reguläre Permutationen in Matrizenform zu schreiben.

Anders wird das, wenn wir nach *wesentlichen* reellen getreuen Darstellungen durch Kollineationen fragen, die also nicht Darstellungen durch ganze lineare

⁵⁾ Es soll nur bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, daß § 5 von [2] leider einen Irrtum enthält; entgegen der in Anm. 26 aufgestellten Behauptung braucht (48) nicht notwendigerweise ein Automorphismus zu sein. Trotzdem gelingt es auch dann — freilich manchmal nur durch viel längere Rechnungen — durch ein dem in [2] geschilderten ähnliches Kompositionsverfahren alle irreduziblen getreuen Darstellungen zu finden.

homogene Substitutionen sind oder durch Umnormierung sich in solche überführen lassen. Wir sahen bereits oben (Satz 2.1), daß zyklische Gruppen überhaupt keine wesentlichen Darstellungen durch Kollineationen zulassen, geschweige denn reelle. Wie liegt die Sache bei nichtzyklischen Abelschen Gruppen? Die Antwort wird gegeben durch

Satz 3.1. *Dann und nur dann, wenn $n \geq 2$ ist und wenn außerdem a_2 eine gerade Zahl ist, besitzt die Gruppe (2.1) wesentliche getreue Darstellungen durch reelle Kollineationen.*

Beweis. Daß $n \geq 2$ sein muß, folgt aus Satz 2.1; die Notwendigkeit der Bedingung, daß a_2 (und mithin auch a_1) eine gerade Zahl sein muß, erkennt man folgendermaßen indirekt:

Wäre a_2 eine ungerade Zahl, so wären wegen (2.4) auch $a_3, a_4, \dots, a_n$ ungerade Zahlen. Die einzige *reelle* Lösung der Gln. (2.10) wäre dann: $\lambda_{ij} = 1$ für alle $1 \leq i < j \leq n$; das ist aber bei einer wesentlichen Darstellung nach Satz 2.3 unmöglich.

Daß die im Satz 3.1 angegebenen Bedingungen für die Existenz reeller getreuer wesentlicher Darstellungen durch Kollineationen auch hinreichend sind, beweist man durch Angabe eines Beispiels: Wie jede Gruppe läßt auch unsere Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ eine reelle getreue Darstellung durch ganze lineare homogene Substitutionen zu, z. B. die in Matrizenform geschriebene Darstellung durch reguläre Permutationen. Sei hierbei $P(A_i)$ die dem erzeugenden Element A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) entsprechende Matrix⁶⁾. Wir bilden dann folgende quadratische Matrizen mit $2a_1a_2 \dots a_n$ Zeilen und Spalten:

$$(3.1) \quad M(A_1) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & -P(A_1) \end{pmatrix},$$

$$(3.2) \quad M(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & P(A_2) \\ P(A_2) & 0 \end{pmatrix},$$

und wenn $n > 2$ ist:

$$(3.3) \quad M(A_i) = \begin{pmatrix} P(A_i) & 0 \\ 0 & P(A_i) \end{pmatrix} \quad (i = 3, 4, \dots, n).$$

Daß es sich hierbei um eine reelle getreue Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen handelt, wenn a_2 gerade ist, prüft man leicht nach; die Darstellung ist wesentlich, weil $\lambda_{12} = -1$ ist.

Hiermit ist der Beweis von Satz 3.1 beendet; es sei jedoch bemerkt, daß man statt der hier verwendeten Darstellung (3.1) bis (3.3) reelle Darstellungen von geringerem Grad finden kann, indem man für die $P(A_i)$ statt der regulären Permutationen eine andere reelle getreue Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch ganze lineare homogene Substitutionen einsetzt. Manchmal ist noch eine weitere Reduktion des Grades möglich, wie aus dem folgenden Beispiel ersichtlich

⁶⁾ So daß $\{P(A_i)\}^{a_i} = I_{n \times a_i}$ und $P(A_i) \cdot P(A_j) = P(A_j) \cdot P(A_i)$ gilt.

ist, wo für die Abelsche Gruppe der Ordnung 12 mit $a_1=6$, $a_2=2$ eine wesentliche getreue Darstellung durch reelle Kollineationen vom vierten Grade (statt vom Grade $2a_1a_2=24$) angegeben wird:

$$(3.4) \quad M(A_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(3.5) \quad M(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Darstellung von Diedergruppen durch Kollineationen.

$\mathfrak{D}_{2n}$, die Diedergruppe der Ordnung $2n$ (wo $n > 2$ vorausgesetzt ist), kann bekanntlich durch zwei Elemente A und B mit den folgenden definierenden Relationen erzeugt werden:

$$(4.1) \quad A^2 = B^2 = (AB)^n = E.$$

Da die $2n$ Elemente von $\mathfrak{D}_{2n}$ in der Form $(AB)^\alpha \cdot B^\beta$ ($0 \leq \alpha < n$; $0 \leq \beta \leq 1$) geschrieben werden können, kann bei einer Darstellung von $\mathfrak{D}_{2n}$ durch Kollineationen durch passende Normierung stets erreicht werden, daß

$$(4.2) \quad M([AB]^\alpha \cdot B^\beta) = \{M(AB)\}^\alpha \cdot \{M(B)\}^\beta \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n-1; \beta = 0, 1)$$

wird; es genügt daher, die beiden Matrizen $M(AB)$ und $M(B)$ anzugeben oder statt dessen auch die Matrizen $M(A)$ und $M(B)$, denn aus (4.2) ergibt sich insbesondere für $\alpha = \beta = 1$:

$$(4.3) \quad M(A) = M(AB) \cdot M(B).$$

Ferner müssen wegen (4.1) die beiden Matrizen $\{M(A)\}^2$ und $\{M(B)\}^2$ Multiplikationen sein; durch Umnormierung können wir daher stets erreichen, daß

$$(4.4) \quad \{M(A)\}^2 = \{M(B)\}^2 = I_f$$

wird, und durch rechtsseitige Multiplikation von (4.3) mit $M(B)$ ergibt sich dann:

$$(4.5) \quad M(AB) = M(A) \cdot M(B).$$

Endlich muß wegen (4.1) auch $\{M(AB)\}^n$ eine Multiplikation sein; d. h. es muß eine reelle oder komplexe Zahl λ geben derart, daß

$$(4.6) \quad \{M(AB)\}^n = \{M(A) \cdot M(B)\}^n = \lambda I_f$$

gilt. Hier läßt sich aber zeigen, daß $\lambda^2 = 1$ sein muß:

Multiplizieren wir (4.3) links mit $M(B)$, so ergibt sich wegen (4.4):

$$(4.7) \quad M(B) \cdot M(A) = \{M(B)\}^{-1} \cdot M(AB) \cdot M(B);$$

wegen (4.4) und (4.5) ist aber die linke Seite von (4.7) gleich $\{M(AB)\}^{-1}$, so daß wir erhalten:

$$(4.8) \quad \{M(AB)\}^{-1} = \{M(B)\}^{-1} \cdot M(AB) \cdot M(B).$$

Erheben wir nun beide Seiten von (4.8) in die n -te Potenz, so folgt:

$$(4.9) \quad \{M(AB)\}^{-n} = \{M(B)\}^{-1} \cdot \{M(AB)\}^n \cdot M(B)$$

und durch Einsetzen von (4.6) ergibt sich

$$(4.10) \quad \frac{1}{\lambda} I_f = \lambda I_f,$$

d.h. tatsächlich:

$$(4.11) \quad \lambda = \pm 1.$$

Bei einer *wesentlichen* Darstellung von $\mathfrak{D}_{2n}$ durch Kollineationen muß aber dann

$$(4.12) \quad \lambda = -1$$

sein (da bei den vorgenommenen Normierungen eine Darstellung durch ganze lineare homogene Substitutionen vorliegen würde, wenn $\lambda = 1$ wäre).

Bei einer wesentlichen Darstellung geht daher (4.6) über in:

$$(4.13) \quad \{M(AB)\}^n = \{M(A) \cdot M(B)\}^n = -I_f.$$

Wir müssen nun folgende zwei Fälle unterscheiden:

1. n ist *ungerade*; dann können wir, ohne die Normierungsbedingungen (4.4) zu verletzen, die Matrix $M(A)$ noch mit -1 multiplizieren, die Matrix $M(B)$ aber unverändert lassen, so daß sich laut (4.5) auch $M(AB)$ mit -1 multipliziert. Bei dieser Umnormierung verschwindet aber das Minuszeichen in (4.13); es gibt also in diesem Falle gar keine wesentlichen Darstellungen durch Kollineationen.

2. n ist *gerade*; jetzt kann das Minuszeichen in (4.13) nicht durch Multiplikation von $M(A)$ oder $M(B)$ mit -1 weggeschafft werden. Tatsächlich gibt es jetzt wesentliche Darstellungen durch Kollineationen, wie die folgende Darstellung $N(G)$ lehrt, in der ε eine primitive $2n$ -te Einheitswurzel bedeutet:

$$(4.14) \quad N(A) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist aber auch leicht einzusehen, wie man bei geradem n alle wesentlichen Darstellungen erhalten kann. Erhebt man nämlich (4.13) ins Quadrat, so ergibt sich:

$$(4.15) \quad \{M(A) \cdot M(B)\}^{2n} = I_f$$

und somit erfüllen wegen (4.4) die Matrizen $M(A)$ und $M(B)$ die zu (4.1) ganz analogen definierenden Relationen einer Diedergruppe der doppelten

Ordnung $4n$. Unter Berücksichtigung von (4.13) können wir also endlich folgenden Satz⁷⁾ aussprechen:

Satz 4.1. *Die Diedergruppe der Ordnung $2n$ besitzt dann und nur dann wesentliche Darstellungen durch Kollineationen, wenn n gerade ist; diese können bei geeigneter Normierung erhalten werden als solche Darstellungen einer Diedergruppe der Ordnung $4n$ durch ganze lineare homogene Substitutionen, bei denen $(AB)^n$ durch die mit -1 multiplizierte Einheitsmatrix dargestellt wird.*

Literatur.

[1] ASANO, K., u. K. SHODA: Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen. *Compositio Mathematica* **2**, 230—240 (1935). — [2] FRUCHT, R.: Über die Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen. *J. reine u. angew. Math.* **166**, 16—29 (1931). — [3] SCHUR, I.: Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. reine u. angew. Math.* **127**, 20—50 (1904). — [4] SCHUR, I.: Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. reine u. angew. Math.* **132**, 85—137 (1907). — [5] SCHUR, I.: Über die Darstellung der symmetrischen und alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. reine u. angew. Math.* **139**, 155—250 (1911).

⁷⁾ In der SCHURschen Terminologie würde dieser Satz folgendermaßen lauten: „ $\mathfrak{D}_{2n}$ ist abgeschlossen, wenn n ungerade ist; wenn n gerade ist, ist $\mathfrak{D}_{4n}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{D}_{2n}$.“ Bei SCHUR findet sich dieser Satz in [4], S. 108f., aber nur für den Fall, daß n eine Potenz von 2 ist; es ist nämlich zu beachten, daß die von SCHUR dort $\mathfrak{D}_l$ genannte Gruppe die Diedergruppe der Ordnung 2^l ist (also unser $\mathfrak{D}_{2^l}$). Ist n eine ungerade *quadratfreie* Zahl, so ist die Tatsache, daß $\mathfrak{D}_{2n}$ abgeschlossen ist, auch eine Folge eines allgemeinen Satzes von SCHUR, wonach alle Gruppen von quadratfreier Ordnung abgeschlossen sind (s. [3], S. 48).

Universidad Técnica Santa María, Cas. 110-V, Valparaíso (Chile).

(Eingegangen am 30. Januar 1955.)

Die Harnacksche Ungleichung für positive harmonische Funktionen.

ISSAI SCHUR in memoriam.

Von

EBERHARD HOPF.

G bezeichne ein offenes Gebiet im n -dimensionalen Euklidischen Raume. Ein bekannter Satz der Potentialtheorie besagt, daß für irgend zwei feste Punkte x, x' in G die für sämtliche in G positiven und harmonischen Funktionen u betrachteten Quotienten $u(x')/u(x)$ eine endliche obere Grenze besitzen. Ebenfalls bekannt ist, daß für dieselben Funktionen u der logarithmische Gradient $u'(x)/u(x)$ in jedem festen Punkte x von G beschränkt ist. Die letztere Tatsache gehört von Rechts wegen in dieselbe Kategorie wie einige neuerdings entdeckte interessante Ungleichungen für Ableitungen von Lösungen gewisser nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen (z. B. der Satz von E. HEINZ über die zweiten Ableitungen der Lösungen der Minimalflächengleichung). Man sieht das, wenn man bedenkt, daß $v = \ln u$ eine in G reguläre Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\Delta v + \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

ist. Jene Tatsache besagt dann, daß für alle in G regulären Lösungen v die ersten Ableitungen $v'(x)$ in jedem festen Punkte x von G beschränkt sind. Diese Bemerkung sei nur nebenbei gemacht. Der Hauptzweck dieser Note ist, einen besonders einfachen Beweis der beiden Sätze über positive harmonische Funktionen mitzuteilen. Die Sätze haben ihre Wurzel in ihrem wichtigsten Spezialfall, wo G ein Hyperkugelgebiet ist (HARNACKSche Ungleichungen). Es genügt, den Fall zu betrachten, wo G das Kugelgebiet $|x| < R$ um den Nullpunkt ist, und den Quotienten $u(x)/u(0)$ nach oben abzuschätzen. Die übliche Herleitung dieser Abschätzung beruht auf der Poissonschen Integralformel, die die erste Randwertaufgabe für den Kugelball explizit löst. Man kann jedoch schon ganz einfach schließen, wenn man lediglich die Tatsache benützt, daß für eine in einem abgeschlossenen Kugelbereich harmonische Funktion der Wert im Mittelpunkt gleich dem Integralmittel der Werte auf der Oberfläche ist. Daraus folgt unmittelbar, daß der Wert im Mittelpunkt auch gleich dem Volummittel der Werte in der Kugel ist, und das bleibt richtig, wenn man bei der Mittelbildung einen beliebigen Gewichtungsfaktor benützt, vorausgesetzt, daß dieser nur von der Entfernung vom Mittelpunkt abhängt. Zum Beispiel ist der Wert im Mittelpunkt gleich dem gewöhnlichen Volummittel der Werte in einer konzentrischen Kugelschale.

u sei harmonisch und positiv in K : $|y| \leq R$. $V(r) \sim r^n$ bezeichne das Volumen einer Kugel vom Radius r . Die größte in K gelegene Kugel K' um einen Punkt x von K hat den Radius $R - |x|$. Dann folgt wegen $u > 0$

$$V(R) u(0) = \int_K u(y) dV \geq \int_{K'} u(y) dV = V(R - |x|) u(x)$$

oder

$$(1) \quad \frac{u(x)}{u(0)} \leq \left(\frac{R}{R - |x|} \right)^n,$$

womit bereits alles bewiesen ist. Subtrahiert man Eins von beiden Seiten und läßt man nach Division durch $|x|$ diese letztere Größe gegen Null streben, so erhält man

$$(2) \quad \frac{|u'(0)|}{u(0)} \leq \frac{n}{R}$$

für den logarithmischen Gradienten im Nullpunkt. (1) und (2) gelten, wenn u lediglich im Inneren von K , $|x| < R$, harmonisch und positiv ist (triviale Grenzbetrachtung). Aus (2) folgt sofort die allgemeinere Ungleichung: Ist u in einem offenen Gebiete G harmonisch und positiv, so gilt in G

$$(2') \quad \frac{|u'(x)|}{u(x)} \leq \frac{n}{d},$$

wo d der Abstand von x vom Rande von G ist. Wendet man (2') wieder auf die Kugel K an, so ergibt sich durch Integration längs eines Radius von 0 bis x wieder genau die Ungleichung (1).

Die Schranke in (2) ist bekanntlich die beste. In (1) ist das jedoch nicht der Fall. Da liefert die Poissonsche Integralformel die richtige obere Grenze. Die letztere wird am Rande $|x| = R$ nicht von der n -ten, sondern nur von der $(n-1)$ -ten Ordnung unendlich. Die richtige Größenordnung ergibt sich, wenn man den obigen Beweis von (1) nicht mit dem Volummittel über die ganze Kugel K , sondern mit dem Mittel über die dünnste, K' enthaltende Kugelschale S um 0 beginnt. S hat das Volumen $(|x| > \frac{1}{2}R) V(R) - V(2|x| - R)$. Damit erhält man

$$\frac{u(x)}{u(0)} \leq \frac{R^n - (2|x| - R)^n}{(R - |x|)^n}, \quad |x| \geq \frac{1}{2}R.$$

Eine weitere Verbesserung der Schranke dürfte durch andere Gewichtsverteilung bei der Mittelbildung möglich sein, aber damit wäre die Einfachheit des Gedankenganges zerstört.

Grad. Inst. for Math. and Mech., University of Indiana, Bloomington, Indiana (U.S.A.).

(Eingegangen am 15. Januar 1955.)

On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set.

To the memory of I. SCHUR.

By

M. FEKETE and G. SZEGÖ.

§ 1. Introduction.

1. Generalizing certain results of I. SCHUR [6]¹⁾ published in the first volume of this journal, M. FEKETE [2, pp. 240–241] proved the following theorem:

A. Let S be a bounded and closed set in the complex z -plane, whose transfinite diameter d satisfies the condition

$$(1) \quad d < 1.$$

Then there is only a finite number of irreducible algebraic equations with rational integral coefficients of the form

$$(2) \quad z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

the roots of which lie all in S .

For the definition of the transfinite diameter of a closed set, we refer to the above quoted paper of M. FEKETE. The condition (1) can be replaced, as mentioned there, by the condition

$$d^* < 1$$

where d^* denotes the transfinite diameter²⁾ of the so-called "symmetric kernel" S^* of S ; S^* is the set of all those points of S which belong, together with their images with respect to the real axis, to S .

2. By retaining condition (1), one can obtain another improvement of Theorem A, admitting algebraic equations of the form (2) whose coefficients are integral numbers of a given quadratic-imaginary field, and which are irreducible in this field. Thus the following theorem holds:

B. Let S be a point-set as in Theorem A. Furthermore, let ϑ satisfy a quadratic equation

$$z^2 + pz + q = 0$$

¹⁾ Numbers in square brackets refer to the Bibliography.

²⁾ From the definition of the transfinite diameter it follows that $d^* \leq d$. If S^* is empty we write $d^* = 0$.

with rational integral coefficients and of a negative discriminant. Then there exists only a finite number of equations of the form (2), irreducible in the algebraic field $P(\vartheta)$ generated by ϑ , whose coefficients are integers of $P(\vartheta)$ and whose roots lie all in S .

In § 2 we shall give a proof of this theorem based on the "resultant method" of the paper [2].

3. Theorem B loses its validity when the algebraic field F to which the integral coefficients of (2) belong and in which this equation is irreducible, is different from that of the rational numbers or from the quadratic-imaginary fields $P(\vartheta)$. In fact, the integral numbers of such a field F lie every-where dense on the real axis or in the complex plane according as F is real or complex. Consequently an arbitrary small real interval or an arbitrary small circle contains an infinite number of algebraic integers from F . Thus there is an infinite number of equations of the form (2) with integral coefficients from F (for instance, linear ones) whose roots belong to a suitable chosen set S of an arbitrary small transfinite diameter. We can choose S so that it contains an arbitrary small real interval, or an arbitrary small circle.

4. We introduce the following terminology used throughout this paper. Let ϑ be a fixed number satisfying an algebraic equation $z^2 + pz + q = 0$ with rational integral p and q and of a negative discriminant, and let $P(\vartheta)$ denote the algebraic field generated by ϑ . We say that an algebraic equation is of the class $K(\vartheta)$ if it has the form (2) with integral coefficients belonging to $P(\vartheta)$ and it is irreducible in $P(\vartheta)$. Likewise, we say that an equation is of the class K if it has the form (2) with rational integral coefficients and it is irreducible in the rational field P .

From Theorem B it is obvious that the existence of an infinite number of equations of class $K(\vartheta)$ whose roots lie all in a closed and bounded set S , imposes upon the transfinite diameter d of S the inequality

$$d \geq 1.$$

Similarly the symmetric kernel S^* of S must have (see above) a transfinite diameter d^* , satisfying

$$d^* \geq 1$$

provided the equations (2) have rational integral coefficients only. The remark of § 3. suggests, however, that these necessary conditions are not always sufficient in order to ensure the mentioned existence, but that the set S is to be subject to some further conditions as to the manner of the distribution of its points.

In fact, let S consist of the points of the circle $|z| = e$, or, more generally, of those of the circle $|z| = t$ where $t > 1$ is a transcendental number; then —though $d(S) = d(S^*) = t > 1$ —there are no irreducible equations (2) with integral coefficients from a quadratic-imaginary field $P(\vartheta)$, whose roots lie all in S . Indeed this would imply the relation $t^n = |a_n|$ which is impossible.

5. It is an important but seemingly a difficult problem to find simple necessary and sufficient conditions for the just discussed existence. Instead of solving this problem we shall be satisfied in the present paper with the statement of some sufficient conditions, which, nevertheless, will lead us to an answer in some important and comparatively general cases. The conditions are of set-theoretic nature and will be formulated in § 4 and § 5.

We have already specified the content of § 2. In § 3 we deal with our problem for the case of lemniscates, respectively sets S which enclose a lemniscate-line of a certain type (Theorems C, D and E). The transition to more general sets follows in § 4 (Theorems F and G).

Subsequently, we derive in § 5 extensions of the results so obtained (Theorems H, I, J, K and L).

The proofs are of elementary nature. The decisive question is the possibility of the exhaustion of a given set through lemniscate-domains lying in this set and having transfinite diameters which converge to that of the set (respectively to the transfinite diameter of the set which results through adjunction of the boundary points of an open set). In all such cases the condition $d > 1$ ensures the existence of an infinite number of algebraic equations with integral coefficients from an arbitrarily prescribed imaginary-quadratic field $P(\theta)$, which are irreducible in $P(\theta)$ and whose roots belong to the given set.

§ 2. Proof of Theorem B.

1. By assumption (1) there must be [2, p. 236] a polynomial

$$b(z) = z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_{k-1} z + b_k$$

whose maximum-modulus μ in S is less than 1; consequently the polynomials

$$t_{km+l}(z) = [b(z)]^m z^l = z^{km+l} + \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, k-1,$$

satisfy in S the inequality

$$(3) \quad |t_{km+l}(z)| \leq \gamma \varrho^{km+l}$$

where $\varrho = \mu^{1/k}$ and $\gamma \geq 1$ denote certain constants independent of m and l . Hence we can, as it will be shown below, infer the existence of a polynomial

$$c(z) = z^r + c_1 z^{r-1} + \dots + c_{r-1} z + c_r$$

whose coefficients are integers of $P(\theta)$ (even of the form $g + h\theta$ with rational integral g and h) and whose absolute value on S remains under 1.

Now let

$$a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

be any polynomial in z of the class $K(\theta)$ whose zeros $z_1, z_2, \dots, z_n$ lie all in S ; then the absolute value of the product

$$c(z_1) c(z_2) \dots c(z_n) = \text{Res}[c(z), a(z)] = \text{an integral number of } P(\theta)$$

must turn out to be less than 1; consequently, the resultant of the polynomials $a(z)$ and $c(z)$ is equal to zero. (Indeed, [I, p. 139] no integer of a quadratic-imaginary field $P(\vartheta)$ which is different from zero can have absolute value less than 1.) This last result means [with regard to the irreducibility of $a(z)$] that $a(z)$ must be a divisor of $c(z)$. But $c(z)$ can only have a finite number of different divisors with integral coefficients from $P(\vartheta)$. Therefore, the number of the polynomials $a(z)$ must be also finite, as asserted before.

2. The existence of the polynomial $c(z)$ with the desired properties can be proved by use of the following device of KAKEYA [5].

Consider the linear combinations

$$L_{\alpha, \beta}(z) = t_{\alpha}(z) + \lambda_1^{(\alpha)} t_{\alpha-1}(z) + \dots + \lambda_{\alpha-\beta}^{(\alpha)} t_{\beta}(z), \quad \alpha > \beta,$$

of the polynomials $t_{\nu}(z)$ introduced above where the λ 's denote complex constants. Let δ denote the length of the greater of the diagonals of the parallelogram with the vertices $0, 1, 1+\vartheta, \vartheta$ (i.e., $\delta = \max(|1+\vartheta|, |1-\vartheta|)$). Among the considered linear combinations for every $\alpha > \beta$ we can find one in which the absolute values of all the factors λ are less than δ and the coefficients of the powers $z^{\alpha-1}, \dots, z^{\beta}$ are integral numbers from $P(\vartheta)$ of the form $g+h\vartheta$ (with integral rational g and h). Indeed, every complex number if not itself coinciding with any of the above mentioned integral numbers, must lie inside or on the boundary of a parallelogram with vertices

$$g+h\vartheta, \quad g+1+h\vartheta, \quad g+1+(h+1)\vartheta, \quad g+(h+1)\vartheta.$$

Thus we have the decomposition

$$(4) \quad L_{\alpha, \beta}(z) = G_{\alpha, \beta}(z) + H_{\alpha, \beta}(z)$$

where the coefficients $g_{\nu}^{(\alpha, \beta)}$ of

$$G_{\alpha, \beta}(z) = z^{\alpha} + g_1^{(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} + \dots + g_{\alpha-1}^{(\alpha, \beta)} z + g_{\alpha}^{(\alpha, \beta)}$$

are integers of $P(\vartheta)$, while

$$H_{\alpha, \beta}(z) = h_0^{(\alpha, \beta)} z^{\beta} + h_1^{(\alpha, \beta)} z^{\beta-1} + \dots + h_{\beta}^{(\alpha, \beta)}$$

is a polynomial whose degree is at most β and whose coefficients $h_{\nu}^{(\alpha, \beta)}$ have absolute values less than δ .

By (3) (and on account of $\gamma \geq 1, \varrho < 1$) $L_{\alpha, \beta}(z)$ must satisfy on S the following inequality

$$(5) \quad |L_{\alpha, \beta}(z)| \leq \gamma \delta (\varrho^{\alpha} + \varrho^{\alpha-1} + \dots + \varrho^{\beta}) < \gamma \delta \frac{\varrho^{\beta}}{1-\varrho}.$$

Now let us fix the integer β so that

$$(6) \quad \gamma \delta \frac{\varrho^{\beta}}{1-\varrho} \leq \frac{1}{3}.$$

In virtue of $|h_{\nu}^{(\alpha, \beta)}| < \delta, \nu = 0, 1, \dots, \beta$, we can select from the set of the polynomials

$$H_{\alpha, \beta}(z), \quad \alpha = \beta + 1, \beta + 2, \dots,$$

an infinite sequence $H_{\alpha_1, \beta}(z), H_{\alpha_2, \beta}(z), \dots, H_{\alpha_j, \beta}(z), \dots$ with $\beta < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_j < \dots$, which converges uniformly in S as $j \rightarrow \infty$. Thus there is a pair of numbers $\alpha_\sigma, \alpha_\tau$ such that $\alpha_\sigma < \alpha_\tau$ and such that in S

$$(7) \quad |H_{\alpha_\sigma, \beta}(z) - H_{\alpha_\tau, \beta}(z)| \leq \frac{1}{3}$$

holds. Hence, by (4), (5) and (6),

$$|G_{\alpha_\tau, \beta}(z) - G_{\alpha_\sigma, \beta}(z)| \leq |L_{\alpha_\tau, \beta}(z)| + |L_{\alpha_\sigma, \beta}(z)| + |H_{\alpha_\tau, \beta}(z) - H_{\alpha_\sigma, \beta}(z)| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Consequently,

$$G_{\alpha_\tau, \beta}(z) - G_{\alpha_\sigma, \beta}(z) = z^{\alpha_\tau} + \dots$$

possesses all the required properties of $c(z)$.

Thus the proof of Theorem B is complete.

§ 3. Theorems on Lemniscates.

1. First we shall deal with an almost obvious proposition:

C. Let the bounded and closed set S contain a lemniscate

$$(8) \quad |c(z)| = 1$$

where the coefficients of the polynomial

$$(9) \quad c(z) = z^r + c_1 z^{r-1} + \dots + c_{r-1} z + c_r$$

are rational integral numbers [or algebraic integral numbers from a quadratic-imaginary field $P(\theta)$]. Then there is an infinite number of equations of the class K [or of the class $K(\theta)$] whose roots all lie in S [namely, on the lemniscate-line (8)].

For the proof we note that, for $k=1, 2, \dots$, all the equations

$$(c(z))^k - 1 = 0$$

have coefficients as $c(z)$ itself; the same is true for the equations

$$d_k(z) = \frac{(c(z))^k - 1}{c(z) - 1} = 0$$

where $k \geq 2$. All these equations have roots which lie on the lemniscate-line (8) and, consequently, also in S . Furthermore, $d_{k_1}(z)$ and $d_{k_2}(z)$ are certainly without common divisors whenever k_1 and k_2 denote different primes.

We denote by $\delta_2(z), \delta_3(z), \delta_5(z), \delta_7(z), \delta_{11}(z), \dots$ factors of the polynomials $d_2(z), d_3(z), d_5(z), d_7(z), d_{11}(z), \dots$, belonging to the class K [or to $K(\theta)$]. These $\delta(z)$'s yield infinitely many algebraic equations with all the properties required.

2. A result which lies much deeper than C and which forms the most relevant basis of our following considerations is

D. Let

$$b(z) = z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k$$

be a polynomial with real (resp. arbitrary complex) coefficients and let R be any real number > 1 . Then there is a lemniscate (8): $|c(z)| = 1$, which is enclosed by the lemniscate

$$(10) \quad |b(z)| = R.$$

Here the coefficients of $c(z)$ satisfy the conditions formulated in C.

We first prove the existence of a polynomial $\beta(z) = z^k + \beta_1 z^{k-1} + \dots + \beta_k$ with coefficients of the fields P and $P(\theta)$, respectively, such that for suitably chosen R_1 and R_2 satisfying $1 < R_1 < R_2 < R$, the lemniscate $|\beta(z)| = R_2$ encloses $|b(z)| = R_1$ but is enclosed by (10)³.

Let $1 < R_1 < R$. Put

$$(11) \quad M = \max_{|b(z)|=1} (1 + |z| + \dots + |z|^{k-1}).$$

Choose $\varepsilon > 0$ so that

$$(12) \quad \varepsilon M < 1, \quad \frac{1 + \varepsilon M}{1 - \varepsilon M} R_1 < R,$$

and put $R_2 = (1 + \varepsilon M) R_1$. Clearly $R_1 < R_2 < R$. If the b 's are real, choose rational $\beta_1, \dots, \beta_k$ with $|\beta_j - b_j| < \varepsilon$. If the b 's are complex, choose β_j in $P(\theta)$ satisfying the same inequalities.

Put

$$(13) \quad \beta(z) = z^k + \beta_1 z^{k-1} + \dots + \beta_k.$$

Notice that, by (11),

$$(14) \quad \frac{1 + |z| + \dots + |z|^{k-1}}{|b(z)|} \leq M$$

for $|b(z)| = 1$, and the fraction vanishes at ∞ . Hence the inequality holds whenever $|b(z)| \geq 1$ ⁴. Thus, for $|b(z)| \geq 1$, we have

$$(15) \quad |\beta(z) - b(z)| < \varepsilon(|z|^{k-1} + \dots + 1) \leq \varepsilon M |b(z)|,$$

and therefore in particular

$$(16) \quad (1 - \varepsilon M) |b(z)| < |\beta(z)| < (1 + \varepsilon M) |b(z)|.$$

Consequently $|\beta(z)| < R_2$ for $|b(z)| = R_1$, and hence for $|b(z)| \leq R_1$. Hence if $|\beta(z)| = R_2$, then $|b(z)| > R_1$. On the other hand, under the same condition, in view of (16),

$$(17) \quad |b(z)| < \frac{1}{1 - \varepsilon M} |\beta(z)| = \frac{1}{1 - \varepsilon M} R_2 < R.$$

Thus the lemniscate $|\beta(z)| = R_2$ lies in the region $R_1 < |b(z)| < R$, enclosing $|b(z)| = R_1$ and being enclosed by $|b(z)| = R$ as required.

³) This proof of the existence of $\beta(z)$ (terminating at the end of 2.) which replaces a more complicated argument, is due to Professor R. M. ROBINSON to whom we owe also other improvements of the manuscript.

⁴) Cf. G. PÓLYA and G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, 1925, vol. 1, p. 142, problem 299.

3. We proceed now to the proof of Theorem D. The lemniscate $|\beta(z)| = R_2$ has a "radius" $R_2^{1/k}$ which exceeds 1. The polynomial (13) can be written as follows:

$$\beta(z) = z^k + \frac{\gamma_1 z^{k-1} + \gamma_2 z^{k-2} + \dots + \gamma_k}{n}$$

where n denotes a natural number and the γ 's are rational integers [resp. algebraic integers of $P(\vartheta)$]. Let first $n=1$; then, because of the properties of $\beta(z)$ explained above,

$$|\beta(z)| = 1$$

will furnish the required lemniscate. In order to prove the existence of (8) also in the case $n > 1$, we choose a natural number μ (of which we shall dispose later) and we define $\sigma = \mu k$, $\nu = \sigma! n^\sigma$; obviously $\nu > \sigma \geq \mu$. Then we form

$$\begin{aligned} (\beta(z))^\nu &= z^{k\nu} + \frac{\nu}{n} z^{k(\nu-1)} (\gamma_1 z^{k-1} + \dots + \gamma_k) + \dots \\ &\quad + \frac{\nu}{\sigma! n^\sigma} (\nu-1) \dots (\nu-\sigma+1) z^{k(\nu-\sigma)} (\gamma_1 z^{k-1} + \dots + \gamma_k)^\sigma + \\ &\quad + \left(\frac{\nu}{\sigma+1} \right) z^{k(\nu-\sigma-1)} \left(\frac{\gamma_1 z^{k-1} + \dots + \gamma_k}{n} \right)^{\sigma+1} + \dots \end{aligned}$$

Here the coefficients of $z^{k\nu-1}, z^{k\nu-2}, \dots, z^{k\nu-\sigma}$ are rational integers [resp. algebraic integers of $P(\vartheta)$]. Thus we can determine the real (resp. complex) numbers

$$\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_k^{(1)}; \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_k^{(2)}; \dots; \lambda_1^{(\nu-\mu)}, \dots, \lambda_k^{(\nu-\mu)}$$

such that in

$$\begin{aligned} I_\mu(z) &= (\beta(z))^\nu + \lambda_1^{(1)} z^{k-1} (\beta(z))^{\nu-\mu-1} + \lambda_2^{(1)} z^{k-2} (\beta(z))^{\nu-\mu-1} + \dots + \lambda_k^{(1)} (\beta(z))^{\nu-\mu-1} \\ &\quad + \lambda_1^{(2)} z^{k-1} (\beta(z))^{\nu-\mu-2} + \lambda_2^{(2)} z^{k-2} (\beta(z))^{\nu-\mu-2} + \dots + \lambda_k^{(2)} (\beta(z))^{\nu-\mu-2} \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \lambda_1^{(\nu-\mu)} z^{k-1} + \lambda_2^{(\nu-\mu)} z^{k-2} + \dots + \lambda_k^{(\nu-\mu)} \\ &= (\beta(z))^\nu + (\beta(z))^{\nu-\mu-1} [\lambda_1^{(1)} z^{k-1} + \lambda_2^{(1)} z^{k-2} + \dots + \lambda_k^{(1)}] \\ &\quad + (\beta(z))^{\nu-\mu-2} [\lambda_1^{(2)} z^{k-1} + \lambda_2^{(2)} z^{k-2} + \dots + \lambda_k^{(2)}] \\ &\quad + \dots + [\lambda_1^{(\nu-\mu)} z^{k-1} + \lambda_2^{(\nu-\mu)} z^{k-2} + \dots + \lambda_k^{(\nu-\mu)}] \\ &= (\beta(z))^\nu + \Delta_\mu(z) = z^{k\nu} + \delta_1 z^{k\nu-1} + \dots \end{aligned}$$

all coefficients are rational integers [resp. algebraic integers $P(\vartheta)$ of the form $g + h\vartheta$ with rational integers g and h]; also all λ 's are in the absolute value < 1 (resp. $< 1 + |\vartheta|$) (see § 2.2).

For $|\beta(z)| = R_2$ it holds, since $R_2 > 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta_\mu(z)}{(\beta(z))^\nu} \right| &< c \max_{\beta(z)=R_2} (1 + |z| + \dots + |z|^{k-1}) \left(\frac{1}{R_2^{\mu+1}} + \frac{1}{R_2^{\mu+2}} + \dots + \frac{1}{R_2^\nu} \right) \\ &< c \frac{N}{R_2^\mu} \frac{1}{R_2 - 1} \end{aligned}$$

with $c=1$ (resp. $c=1+|\vartheta|$) and

$$N = \max_{\beta(z)=R_2} (1 + |z| + \dots + |z|^{k-1});$$

consequently, for $\mu \geq \mu_0$, we have

$$\frac{|A_\mu(z)|}{|\beta(z)|^\nu} < \frac{1}{2}.$$

Now, according to Rouché's theorem, all the zeros of $I_\mu(z)$ must lie in the interior of $|\beta(z)|=R_2$ as soon as $\mu \geq \mu_0$.

On the other hand, it holds, for $\mu \geq \mu_0$, everywhere on the same curve,

$$|I_\mu(z)| \geq |\beta(z)|^\nu - |A_\mu(z)| = R_2^\nu \left(1 - \frac{|A_\mu(z)|}{R_2^\nu}\right) > \frac{R_2^\nu}{2} > \frac{R_2^\mu}{2}.$$

Thus, if $\mu_1 \geq \mu_0$ is large enough, we have, for $\mu \geq \mu_1$, the inequality

$$(18) \quad |I_\mu(z)| > 1;$$

hence the lemniscate

$$(19) \quad |I_\mu(z)| = 1$$

will be enclosed by $|\beta(z)|=R_2$, [and, therefore, *a fortiori*, by (10)]. Indeed, since the foci of (19) [*i.e.*, the zeros of $I_\mu(z)$] lie all, as already established, in the interior of $|\beta(z)|=R_2$, we can conclude from the minimum-principle of the theory of functions that everywhere in the exterior of $|\beta(z)|=R_2$ the inequality (18) must be valid. Thus the existence-proof of (8) is complete.

4. A combination of Theorems C and D yields

E. If a bounded point-set of the complex z-plane contains a lemniscate-domain

$$(20) \quad |z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k| \leq R$$

whose radius (= $R^{1/k}$ = the transfinite diameter of this domain) exceeds unity, then there is an infinite number of algebraic equations of the class $K(\vartheta)$ whose roots all lie in S .

Remark. According to C and D there is even an infinite number of equations of the characterized kind whose roots all lie on a lemniscate (8), which is enclosed by (20), where (9) has integral coefficients out of $P(\vartheta)$ (resp. rational integral coefficients, in the case that S is symmetrical with respect to the real axis). Thus we have already obtained a large class of point-sets S with an infinite number of equations of the required kind. Our further task is to replace the existence of the lemniscate-domain (20) by other conditions, which are easier to manage.

§ 4. Passage to more general sets.

1. The range of Theorem E and of the Remark formulated above can be recognized from the following proposition:

F. Let S be a bounded and closed point-set of the z-plane, whose complementary set $\bar{S}$ is a connected open set. Denote by $S(\varrho)$ the set of points belonging to the circles with the radius ϱ described about the points of the set S .

Let the transfinite diameter of S be not less than 1. Then however small $\varrho > 0$ may be, there is an infinite number of equations of the class $K(\vartheta)$ whose roots all lie in $S(\varrho)$. In the case where S is symmetrical with respect to the real axis of the z -plane, there is even an infinite number of equations of the class K whose roots all lie in $S(\varrho)$.

Remark to F. Under the above conditions regarding S , there is even an infinite number of equations of the characterized kind whose roots all lie on a lemniscate-curve (8) contained in $S(\varrho)$, where the coefficients of (9) are integral numbers of $P(\vartheta)$ (resp. rational integral numbers if S lies symmetrically to the real axis).

2. The proof of Theorem F and of the Remark can be based on the preceding, combined with an extension of Hilbert's classical theorem on the approximation of arbitrary analytical curves by lemniscates [4]. This extension, due to FEKETE [3, p. 638] (in a more restricted form than stated below), is as follows:

G. Let S be an arbitrary set with the properties required at the beginning of F. Let $n \geq 2$; we denote by $\zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ a system of points on S for which $\prod |z_i - z_k|$, $1 \leq i < k \leq n$, attains its maximum when $z_1, \dots, z_n$ vary independently on S . Let μ_n denote the maximum of the absolute value of

$$\tau_n(z) = (z - \zeta_1^{(n)}) \dots (z - \zeta_n^{(n)})$$

in S . Then the lemniscate-domain, defined by

$$(21) \quad |\tau_n(z)| \leq \mu_n$$

is contained in $S(\varrho)$ provided $n \geq n_0 = n_0(\varrho)$. Here ϱ and $S(\varrho)$ have the same meaning as in F.

If S is symmetrical with respect to the real axis, then not only (21) but also the lemniscate-domain defined by

$$(22) \quad |\omega_n(z)| \leq \nu_n$$

is contained in $S(\varrho)$ whenever $n \geq n_1 = n_1(\varrho)$. Here $\omega_n(z)$ and ν_n are defined by

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k^{(n)}) \cdot \prod_{k=1}^n (z - \overline{\zeta_k^{(n)}}) = \tau_n(z) \bar{\tau}_n(z),$$

$$\nu_n = \max_{z \text{ in } S} |\omega_n(z)|.$$

We take this Theorem G for granted and prove F as follows: If the set S of F has a transfinite diameter > 1 , then, for $n \geq n_0(\varrho)$, (21) [resp., when S is symmetrical, for $n \geq n_1(\varrho)$, (22)] can undertake the role of the lemniscate-domain (20) of Theorem E, provided that the role of the point-set of E is passed on to $S(\varrho)$. In fact, the "radius" of (21) [= $\mu_n^{1/n}$ = the transfinite diameter of (21)] cannot, for any $n \geq 2$, be less than the transfinite diameter of the set S covered by (21), i.e., it too must exceed unity for every $n \geq 2$ [resp., the radius of (22) must be greater than 1]; thus, for $n \geq n_0(\varrho)$ [resp.

$n \geq n_1(\varrho)$] (21) [resp., when S and, therefore, also $S(\varrho)$ are symmetrical, (22)] possesses all the properties required for (20).

In the case where the transfinite diameter of S is equal to 1, we can assert again, in view of the monotonicity of the transfinite diameter as a set-function, the inequalities

$$\mu_n^{1/n} \geq 1, \quad \nu_n^{1/n} \geq 1$$

for every $n \geq 2$. Hence it follows, again with the aid of G , that for every $n \geq n_0(\varrho)$ [resp. $n \geq n_1(\varrho)$] and for sufficiently small non-negative $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\varrho)$ [resp. $\eta_n = \eta_n(\varrho)$], the lemniscate-domain

$$(23) \quad |\tau_n(z)| \leq \mu_n + \varepsilon_n$$

[resp.

$$(24) \quad |\omega_n(z)| \leq \nu_n + \eta_n]$$

possesses all the properties required for (20) in Theorem E. Indeed, it has a radius greater than 1 and is completely contained in $S(\varrho)$. In fact, (21) [resp. (22)] is contained, under the above supposition, by virtue of G , for sufficiently large n , in $S(\varrho/2)$ and, consequently (23) [resp. (24)] can, by reason of continuity, have no point in the exterior of $S(\varrho)$ whenever $\varepsilon_n > 0$ (resp. $\eta_n > 0$) are sufficiently small. [Moreover $\omega_n(z)$ has real coefficients.]

Thus, by aid of the auxiliary proposition G , we have proved F and further, with regard to the remark to E , also the remark to F .

3. As to the auxiliary proposition G , we can prove it as follows. Let us assume that for a value of $\varrho > 0$ an infinite sequence

$$(25) \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

of natural numbers exists such that certain points $\zeta_{n_1}, \zeta_{n_2}, \dots, \zeta_{n_k}, \dots$ of the corresponding domains (21) lie outside of the set $S(\varrho)$ (consequently they lie in $\bar{S}$). Then, for a suitable subsequence

$$(26) \quad n'_1, n'_2, \dots, n'_k, \dots$$

of (25), the corresponding ζ 's would converge to a point ζ_0 , situated in the finite portion of the z -plane (and belonging to $\bar{S}$) whose distance from S would be not less than ϱ .

From the existence of such a point ζ_0 , however, a contradiction follows: Indeed, let C be a simple closed curve including the set S and excluding the circle $|z - \zeta_0| \leq \varrho/2$ (the existence of such a curve follows from the assumptions regarding S and from the definition of ζ_0). Let further $\delta = \max|z - t|$ and $\delta' = \min|z - t|$ where z ranges over the interior of C and t over the circle $|t - \zeta_0| \leq \varrho/2$, $\varrho > 0$. Then, according to the well-known theorem of RUNGE there is a polynomial $q(z; t)$ in z (with coefficients depending on t), such that

$$\left| \frac{1}{z - t} - q(z; t) \right| \leq \frac{1}{2\delta}$$

and, consequently,

$$|1 - (z - t)q(z; t)| \leq \frac{1}{2}$$

for all z inside or on C and for all t subject to $|t - \zeta_0| \leq \varrho/2$. Further, we define the polynomial (cf. SZEGÖ [7])

$$P_n(z; t) = \frac{1 - [1 - (z - t)q(z, t)]^\nu}{t - z}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

in z , where ν denotes the greatest integer in n/h and $h - 1$ the degree of $q(z, t)$ in z . We have evidently the following properties:

(1) the degree of $P_n(z; t)$ in z is $\leq n - 1$;

(2) for all z in S , for all t of the circle $|t - \zeta_0| \leq \varrho/2$ and for all $n \geq 2$, the inequality

$$(27) \quad \left| \frac{1}{t - z} - P_n(z; t) \right| \leq c \Theta^n$$

holds where Θ denotes a certain number between 0 and 1 and c a suitable positive constant. [One can set $c = 2/\delta'$, $\Theta = 2^{-1/n}$.]

Now we form the LAGRANGE interpolation polynomial $F_n(z, t)$ associated with the function $(t - z)^{-1} - P_n(z; t) = f_n(z; t)$ and with the points of interpolation $z = \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$. Because of the supposed extremal properties of these points and by (27) (valid for the values z, t, n specified there) we have

$$(28) \quad |F_n(z; t)| \leq n c \Theta^n.$$

Further, the representation

$$(29) \quad F_n(z; t) = \frac{1}{t - z} - P_n(z; t) - \frac{\tau_n(z)}{(t - z) \tau_n(t)}$$

holds, since the right side is a polynomial in z of at most of the degree $n - 1$ which coincides for $z = \zeta_\nu^{(n)}$ ($1 \leq \nu \leq n$) with the above function $f_n(z, t)$ and, consequently with the left side of (29). From (27), (28) and (29) we conclude the relation

$$(30) \quad \left| \frac{\tau_n(z)}{\tau_n(t)} \right| \leq |t - z| (n + 1) c \Theta^n$$

for all values of n, z and t defined above.

The announced contradiction becomes evident from (30) when one chooses for n sufficiently large numbers of the sequence (26) and for z points of the set S such that $|\tau_n(z)| = \mu_n$ holds; finally we set $t = \zeta_n$. In fact, under these conditions we have $|\tau_n(\zeta_n)| \leq \mu_n$, so that the left hand side of (30) is not less than unity, while the right hand side becomes arbitrarily small.

Thus we have proved the first assertion of proposition G.

The second assertion is also easily verified. Assuming that for a value of ϱ and for a sequence (25) the points $\zeta_{n_1}, \dots, \zeta_{n_k}, \dots$ of the lemniscate regions (22) would lie outside $S(\varrho)$, the ζ 's would converge, for a suitable subsequence (26) of (25), to a (finite) point ζ_0 of the region $\bar{S}$ whose distance from S would not be less than ϱ . From the existence of such a point we can again derive a contradiction whenever S lies symmetrically to the real axis of the z -plane. In fact, one obtains, as above, with the same values of n, z and t , the inequality (30). Also, by the symmetry of S with respect to the real axis, together with

$\zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ also their conjugate values $\overline{\zeta_1^{(n)}}, \dots, \overline{\zeta_n^{(n)}}$ make $\prod |z_i - z_k|$ to a maximum; hence the polynomials $\bar{\tau}_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \overline{\zeta_k^{(n)}})$ must satisfy the inequalities

$$(31) \quad \left| \frac{\bar{\tau}_n(z)}{\bar{\tau}_n(t)} \right| \leq |t - z| (n+1) c \Theta^n.$$

But, from (30) and (31) it follows (for the above values of z, t and n):

$$\left| \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)} \right| \leq |t - z|^2 (n+1)^2 c^2 \Theta^{2n};$$

choosing z from S with $|\omega_n(z)| = \nu_n$, $t = \zeta_n$ and $n = n'_k$ (for sufficiently large k), this inequality leads to a contradiction.

5. It is not without interest to observe that, while the second assertion of the remark to F does not yet follow from the first one, the second part of F itself can be deduced from the first one. Indeed, let S be symmetrical with respect to the real axis; one can always specify an infinite sequence $a_1(z), \dots, a_\nu(z), \dots$ of the polynomials of the class $K(\vartheta)$ so that all their zeros are in $S(\varrho)$; one can even assume that for the said sequence not only $a_\nu(z) \neq a_\mu(z)$, but also $a_\nu(z) \neq \bar{a}_\mu(z)$, whenever $\nu \neq \mu$. Under this assumption either the sequence in question or the sequence $a_1(z) \bar{a}_1(z), \dots, a_\mu(z) \bar{a}_\mu(z), \dots$ contains an infinite subsequence of polynomials belonging to K ; in the latter case the zeros lie all in $S(\varrho)$ provided S is symmetrical to the real axis.

§ 5. Extensions.

1. The following theorem provides an essential extension of our result formulated in the former paragraph.

H. *The assertions of Theorem F (and of the subsequent remark) remain valid when the requirement concerning the complementary set S of S is omitted.*

The proof of this theorem which forms a true counterpart to the Theorems A and B depends, besides Theorem F (and the remark to F), on two auxiliary theorems. The first of them (which plays here a similar role as G played in the proof of F) reads as follows:

I. *Let S be a bounded and closed set in the z -plane; the quantities $n, \tau_n(z), \mu_n, \omega_n(z), \nu_n, \varrho, S(\varrho)$ shall have the same meaning as in G. Then the lemniscate*

$$(32) \quad |\tau_n(z)| = \mu_n$$

[resp., when S is symmetrical with respect to the real axis, the lemniscate

$$(33) \quad |\omega_n(z)| = \nu_n]$$

runs completely in $S(\varrho)$ provided $n \geq n_0(\varrho)$ [resp., $n \geq n_1 = n_1(\varrho)$].

The second auxiliary theorem yields a continuity property of the transfinite diameter which is interesting in itself.

J. *Let S be a set as in I, with the transfinite diameter $d = d(S)$, and let z_0 be a point of S . Let S_1 denote that subset of S whose points z satisfy the*

inequality $|z - z_0| \geq \delta$. If $\varepsilon > 0$ is an arbitrary small quantity, S_1 has a transfinite diameter $d(S_1) > d(S) - \varepsilon$ whenever $\delta = \delta(\varepsilon)$ is chosen sufficiently small.

2. We first establish, relying upon I and J, the proof of H. Let the transfinite diameter of S be not less than 1 (resp., let, in addition, S be symmetrical to the real axis). By virtue of the auxiliary Theorem I, the lemniscate

$$(34) \quad |\tau_n(z)| = \mu_n + \varepsilon_n$$

[resp.

$$(35) \quad |\omega_n(z)| = \nu_n + \eta_n]$$

will be contained, for $n \geq n_0(q/2)$ [resp. for $n \geq n_1(q/2)$] and, for a suitably chosen non-negative ε_n (resp. η_n), in $S(q/4)$ and thereby will have a radius exceeding unity (compare the results of § 4.2); this lemniscate will be either a single simple closed curve K or it will consist of ν separated curves K_μ ($1 \leq \mu \leq \nu$; $2 \leq \nu \leq n$ resp. $\leq 2n$). (If S is symmetrical to the real axis, the same will be true of K or the system of curves K_μ .)

Let us fix now a point z_0 on K (this being a real point when S is symmetrical), resp. a point z_μ on each curve K_μ (when S is symmetrical, these points are to be chosen either real, or as pairs of points lying symmetrically to the real axis); the positive number δ can be chosen so small that the set Γ which results from K resp. K_μ through omission of all the points z satisfying $|z - z_0| < \delta$ resp. $|z - z_\mu| < \delta$, $1 \leq \mu \leq \nu$, yields a subset of (34) [resp. of (35)] with a transfinite diameter still greater than 1. Thereby Γ will have, as easily seen, an open and connected set as complementary set (when S is symmetrical, Γ will also be, according to our assumption, symmetrical to the real axis).

Applying now F (and the remark to F) to the set Γ , we obtain the existence of infinitely many equations with the property characterized there whose roots lie in $\Gamma(q/4)$ and, *a fortiori*, in $S(q)$ (and even on lemniscate-curves of the kind specified in the remark). Thus the proof of H is complete.

3. We can now be brief in proving I. For the part of the assertion concerning the lemniscate (32), we can proceed again as in the proof of G. As to the assertion about the lemniscate (33), we shall restrict ourselves to the remark that this assertion, as well as the corresponding one in G about the lemniscate-domain (22) bounded by (33), can be proved similarly as in § 4.4.

4. In order to prove J, we suppose $d(S) > 0$. Let $\delta > 0$ be so small that $2\delta < d(S)$ and $2\delta < 1$. We consider, for every $n \geq 2$, the points $\zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ of the set S for which the absolute value of $\prod(z_i - z_k)$, $1 \leq i < k \leq n$, attains its maximum $d_n^{(n)} \binom{n}{2} = [d_n(S)] \binom{n}{2}$ when $z_1, \dots, z_n$ vary independently in S . We divide these points in two classes, C_1 and C_2 , according as they belong to the subset S_1 of S or not. Let $n_1 = n_1(n)$ be the number of the points in C_1 , $n_2 = n_2(n)$ that of the points in C_2 ; $n_1 + n_2 = n$. Evidently

$$(36) \quad [d_n(S)] \binom{n}{2} \leq [d_{n_1}(S_1)] \binom{n_1}{2} (2\delta) \binom{n_2}{2} [d_2(S)]^{n_1 n_2}$$

where $d_2(S)$ denotes the ordinary diameter (span) of S . In the case $0 \leq n_1 \leq 1$ the first factor on the right is to be replaced by 1.

We assert, first of all, that the sequence $n_1 = n_1(n)$, $n = 2, 3, \dots$ is not bounded. In the contrary case one could deduce from (36), by passing to the limit $n \rightarrow \infty$, the inequality $d(S) \leq 2\delta$, which would contradict the above hypothesis about δ . Let now $n \rightarrow \infty$ over an arbitrary infinite sequence of natural numbers for which $n_1(n) \rightarrow \infty$ and let the limits

$$(37) \quad \lim_{n} \frac{n_1}{n} = \alpha, \quad \lim_{n} \frac{n_2}{n} = \beta, \quad 0 \leq \alpha = 1 - \beta \leq 1,$$

exist. Then, we conclude from (36) that $\alpha > 0$ and $d(S_1) > 0$ satisfying

$$(38) \quad d(S) \leq [d(S_1)]^{\alpha^2} (2\delta)^{\beta^2} [d_2(S)]^{2\alpha\beta}.$$

[In deed $\alpha = 0$ would imply, by (36), $d(S) \leq 2\delta$, against hypothesis.] If $\alpha = 1$, $\beta = 0$, then (38) entails $d(S) \leq d(S_1)$, i.e., $d(S) = d(S_1)$, and thus our assertion. Let us therefore consider the case $0 < \alpha < 1$ and, consequently, $1 > \beta > 0$. Then (38) yields

$$d(S) \leq [d(S)]^{\alpha^2} (2\delta)^{\beta^2} [d_2(S)]^{2\alpha\beta},$$

i.e.,

$$[d(S)]^{1+\alpha} \leq (2\delta)^{\beta} [d_2(S)]^{2\alpha}.$$

Hence

$$(39) \quad \beta \log \frac{1}{2\delta} \leq 2\alpha \log d_2(S) - (1 + \alpha) \log d(S) \leq 2|\log d_2(S)| + 2|\log d(S)|.$$

This inequality shows that β can be made arbitrarily small if δ is small enough. The same follows by (39) for $\beta^2 \log \frac{1}{2\delta}$, so that $(2\delta)^{\beta^2}$ comes arbitrarily close to 1. The same holds for the third factor on the right of (38) while the first one approaches arbitrarily close to $d(S_1) > 0$. Thus our assertion is proved.

5. We derive now an immediate corollary of H providing a simple but very useful sufficient condition for the existence discussed in F and H. This corollary is as follows:

K. Let a bounded and closed set S contain a closed subset S_1 whose points are all inner points of S , and whose transfinite diameter is at least 1. There are infinitely many equations of the class $K(\vartheta)$ whose roots lie in S .

If S_1 is symmetrical with respect to the real axis of the z -plane, then there are infinitely many equations of the class K whose roots lie in S .

Remark. There exist infinitely many equations whose coefficients satisfy the conditions in the first (resp., when S_1 is symmetrical to the real axis, in the second) part of K and whose roots lie on a lemniscate of the form (8) contained in $S_1(\varrho)$, however small the positive quantity ϱ may be. The polynomial (9) possesses in this case integral coefficients only belonging to $P(\vartheta)$ (resp., when S_1 is symmetrical, to the rational number field).

In order to prove K (and the remark) one shall take into consideration the fact that, according to the assumption, with every point P of S_1 also a circle around it belongs to S . If, however, r_P denotes the radius of the largest

possible circle of this kind and ϱ_0 the minimum of r_P while P ranges over all points of S_1 , then ϱ_0 must turn out positive. Thus, together with S_1 , also $S_2 = S_1(\varrho)$ must be wholly contained in S , provided $0 < \varrho \leq \varrho_0$.

Thus H and the remark to H yield (when applied to S_1), Theorem K, and the remark to K whenever $0 < \varrho \leq \varrho_0$.

6. In conclusion an interesting corollary of K can be stated as Theorem

L. Let $\Delta \ni \infty$ be a simply or multiply connected domain in the z -plane and Γ its boundary with $d(\Gamma) > 1$. Suppose that the complement E of $\Delta + \Gamma$ consists of a finite⁵⁾ set of disjoint simply connected domains, say D_ϱ , $1 \leq \varrho \leq r$. Then there are infinitely many equation of the class $K(\vartheta)$ whose roots lie in E and there are even infinitely many equations of this class whose roots lie all on a lemniscate (8), the polynomial (9) possessing integral coefficients which belong to $P(\vartheta)$.

For the proof we combine Theorem K with the following proposition due to FEKETE⁶⁾:

Let Δ , Γ , and E satisfy the conditions of Theorem L. Given an $\varepsilon > 0$, there is a lemniscate Λ having r branches, say Λ_ϱ , $1 \leq \varrho \leq r$, so that Λ_ϱ is in D_ϱ and moreover such that

$$1 \leq d(\Gamma)/d(\Lambda) \leq 1 + \varepsilon.$$

Bibliography.

- [1] BACHMANN, P.: Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Leipzig 1905. — [2] FEKETE, M.: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Z. **17**, 228—249 (1923). — [3] FEKETE, M.: Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. (Dritte Mitt.) Math. Z. **37**, 635—646 (1933). — [4] HILBERT, D.: Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitenden Reihe. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1897**, 63—70. — [5] OKADA, Y.: On approximate polynomials with integral coefficients only. Tôhoku Math. J. **23**, 26—35 (1924). — [6] SCHUR, I.: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Z. **1**, 377—402 (1918). — [7] SZEGÖ, G.: Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen. Math. Ann. **87**, 90—111 (1922).

⁵⁾ This supposition of finiteness is essential to the subsequent conclusion. Eventually, E might fail to harbour any unit lemniscate (8), the polynomial (9) possessing integral coefficients of a field $P(\vartheta)$, or even to enclose all roots of a single equation (2) of the class $K(\vartheta)$ when it consists of infinitely many (disjoint) simply connected domains D_ϱ , $\varrho = 1, 2, 3, \dots$

⁶⁾ On the semi-continuity of the transfinite diameter. Bull. Research Council of Israel **3** (1954), p. 336.

The Hebrew University, Jerusalem (Israel).

Stanford University, Stanford, Cal. (USA.).

(Eingegangen am 7. März 1955.)

Bounds for Analytic Functions in Domains with a Distinguished Boundary Surface *).

To the memory of I. SCHUR.

By

STEFAN BERGMAN.

I. Introduction.

When one investigates the connection between value distributions of an analytic function inside a given domain and on its boundary, a basic difference arises between the theory of functions of one complex variable and of functions of several complex variables. When considering such relations in the case of two complex variables, it is useful to study at first special domains, namely domains bounded by finitely many segments of analytic hypersurfaces. On the (three-dimensional) boundary $\mathfrak{m}^3$ of such a domain $\mathfrak{M}$ lies the (two-dimensional) distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$ which to a certain extent plays a similar role as the boundary curve does in the case of a plane domain. (See II, § 1.) Generalizing the CAUCHY formula in [2, 4, 5, 19, 20]¹⁾ A. WEIL and the author gave formulas expressing the value of a regular function $f(z_1, z_2)$ inside $\mathfrak{M}$ in terms of the value of f on $\mathfrak{D}^2$. (See also SOMMER [17].) However, this formula is more complicated than in the case of one complex variable, since its kernel (i.e., the analog of $[2\pi(z-t)]$ ¹⁾ depends upon the domain. It is therefore of interest to derive other representations of functions $f(z_1, z_2)$ inside $\mathfrak{M}$ in terms of its values on the distinguished boundary surface. In the case of one variable SZEGÖ [18] introduced functions which are orthonormal when integrating along the boundary of the domain. In section II, § 3 of the present paper we consider functions which are orthonormal when integrating over the distinguished boundary surface. They yield a new representation of $f(z_1, z_2)$ in terms of the values on the distinguished boundary surface. Some applications of these representations to the theory of regular and meromorphic functions are discussed in II, § 5.

In II, § 6 we extend the method of the minimum integral to the case of functions for which the integral is finite when integrating over the distinguished boundary surface (for details see II, § 6). The method of the minimum integral is a general procedure to obtain distortion theorems, see [7], [8].

In section III we consider relations between the value distribution of the function f in $\mathfrak{M}$ and in the complementary part $\mathfrak{b}^3 = \mathfrak{m}^3 - \mathfrak{D}^2$ of the boundary. (Here we are particularly interested in relations which have a different character than those in the case of one variable.) In our case $\mathfrak{m}^3$ is a union

*) Work done under contract with the Office of Naval Research.

¹⁾ Numbers in brackets refer to the bibliography.

of (finitely many) segments $\mathbf{i}_k^3$ of analytic hypersurfaces²). To every $\mathbf{i}_k^3$ we can determine a subdomain $\mathfrak{S}$ of $\mathfrak{M}$ possessing the following properties. If a function f is bounded on a (conveniently chosen) line $\mathbf{j}_k^1 \subset \mathbf{i}_k^3$ and omits in $\mathbf{i}_k^3$ two values, say 0 and 1, then there exists a function $U(z_1, z_2, \mathbf{j}_k^1)$ depending only upon the domain $\mathfrak{M}$ and the line $\mathbf{j}_k^1$ so that $|f(z_1, z_2)| \leq U(z_1, z_2, \mathbf{j}_k^1)$, $(z_1, z_2) \in \mathfrak{S}$.

Each $\mathbf{i}_k^3$ is a sum $\mathbf{i}_k^3 = \mathfrak{S} \mathfrak{S}_k^2(\lambda_k)$ of segments of analytic surfaces. In III, § 3 we consider analogous question assuming that (instead of omitting two values) $f(z_1, z_2)$ assumes in every $\mathfrak{S}_k^2(\lambda_k)$ every value at most once.

Notation. The manifolds are denoted as a rule by German characters. The upper index indicates the dimension of the manifold. In the case of four-dimensional manifolds the index 4 is omitted. (Also, the index 0 is not indicated.)

The author wishes to express his thanks to Mr. M. MASCHLER for his helpful suggestions in connection with the present paper.

II. A representation of a function of two complex variables in terms of its value on the distinguished boundary surface.

§ 1. **Introductory remarks.** In the case of one complex variable, in [1, 11] function systems which are orthonormal when integrating over the domain were derived, while in [18] systems which are orthonormal when integrating along the boundary curve were introduced. When we pass to the case of functions of several complex variables, in the case of domains with a distinguished boundary surface, in addition to the two analogous possibilities (integration over the whole domain and over the boundary), we can introduce functions where the integration is carried out over the distinguished boundary surface.

DEFINITION. A (smallest) two-dimensional set $\mathfrak{D}^2$ (not necessarily connected) lying on the boundary $\mathbf{m}^3$ of $\mathfrak{M}$, and possessing the property that every function f regular in the closed domain assumes the maximum of its absolute values, at least at one point of $\mathfrak{D}^2$, is called the distinguished boundary surface of $\mathfrak{M}$.

In particular, if the boundary $\mathbf{m}^3$ is a sum of segments of analytic hypersurfaces, then the distinguished boundary surface is the sum the of the intersections of these segments. See also (2.6a).

In the case of domains which are bounded by two segments of analytic hypersurfaces, an integral formula where integration is taken over the distinguished boundary surface, has been derived in [3]. In the present paper the same problem for domains bounded by finitely many analytic hypersurfaces, i.e., with distinguished boundary surface with more complicated

²) In the present paper we consider only *one* segment of an analytic surface intersecting our domain along a line $\mathbf{a}^1$ lying in $\mathbf{i}_k^3$. Forming a (two parameter) family of such segments one can obtain the subdomains $\mathfrak{S}$. The question of choosing the subdomain $\mathfrak{S}$, to get "best" bounds $U(z_1, z_2, \mathbf{j}_k^1)$ will be discussed in a later paper.

structure is considered. We shall assume that the domains under consideration (which will be denoted by $\mathfrak{M}$) are of a comparatively simple structure. We wish however to stress that these simplifications are made only to shorten the formulation of our hypotheses and that essentially the same results are valid in the case of general domains considered in [4, 5].

§ 2. Domains $\mathfrak{M}$ and their structure^{2a}. We assume that a domain $\mathfrak{M}$ is bounded by finitely many (closed) segments $\overline{i_k^3}$, $k=1, 2, \dots, n$, of analytic hypersurfaces. Every $\overline{i_k^3} = \bigcup_{\lambda_k \in \mathfrak{s}^1} \overline{\mathfrak{S}_k^2}(\lambda_k)$, where $\mathfrak{s}^1 = [0 \leq \lambda_k < 2\pi]$. $\overline{\mathfrak{S}_k^2}(\lambda_k)$ is a domain lying in the analytic surface

$$[\Phi_k(z_1, z_2, \lambda_k) = 0],$$

$\Phi_k(z_1, z_2, \lambda_k)$ being analytic functions of two complex variables z_1, z_2 which are regular in $\mathfrak{M}$ and continuously differentiable in λ_k (Hypothesis 1, a). We assume further that $\overline{\mathfrak{S}_k^2}(\lambda_k)$ can be uniformized, i.e. to every $\Phi_k(z_1, z_2, \lambda_k)$ there exist two continuously differentiable functions $z_v = h_k^v(Z_k, \lambda_k)$, $v=1, 2$, defined in a domain $[Z_k \in \overline{\mathfrak{B}_k^2}(\lambda_k)]$ which map it (1-1) onto $\overline{\mathfrak{S}_k^2}(\lambda_k)$ such that

$$(2.1) \quad \Phi_k[h_k^1(Z_k, \lambda_k), h_k^2(Z_k, \lambda_k), \lambda_k] = 0, \quad Z_k \in \overline{\mathfrak{B}_k^2}(\lambda_k).$$

For every fixed λ_k the $h_k^v(Z_k, \lambda_k)$ are analytic functions of the complex variable Z_k , which are regular in the domain $\overline{\mathfrak{B}_k^2}(\lambda_k)$ of the Z_k plane. Every $\overline{\mathfrak{B}_k^2}(\lambda_k)$ is a simply connected (closed) domain which is bounded by a rectifiable curve (Hypothesis 1, b). As we mentioned before, the boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$ consists of n segments of analytic hypersurfaces $\overline{i_k^3}$,

$$(2.2) \quad \mathfrak{m}^3 = \bigcup_{k=1}^n \overline{i_k^3}.$$

We distinguish on $\mathfrak{m}^3$ two kinds of points. *I-points* i.e. points which belong to one $\overline{i_k^3}$ only and *K-points*, i.e., points which belong to the intersection of two or more $\overline{i_k^3}$'s. According to [4, 5], for every *K-point* (z_1, z_2) which lies on the intersection of $\overline{i_k^3}$ and $\overline{i_s^3}$ we have

$$(2.3) \quad z_m = h_k^m(Z_k, \lambda_k) = h_s^m(Z_s, \lambda_s), \quad m=1, 2.$$

We assume that

$$(2.4) \quad \frac{\partial [h_k^1(Z_k, \lambda_k) - h_s^1(Z_s, \lambda_s), h_k^2(Z_k, \lambda_k) - h_s^2(Z_s, \lambda_s)]}{\partial (\lambda_k, \lambda_s)} \neq 0$$

holds (Hypothesis 2, d).

By repeating the considerations of [4] one can show that all points of boundary curves $i_k^1(\lambda_k)$ of every $\overline{\mathfrak{S}_k^2}(\lambda_k)$ must be *K-points*. Since every point of $i_k^1(\lambda_k)$ must belong to an $\overline{i_s^3}$, $s \neq k$, we can write

$$(2.5) \quad i_k^1(\lambda_k) = \bigcup_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n i_{ks}^1(\lambda_k), \quad i_{ks}^1(\lambda_k) = i_k^1(\lambda_k) \cap \overline{i_s^3},$$

^{2a}) The hypotheses in § 2 are formulated in a rather general way and thus appear complicated. Since these elaborate hypotheses are not essential for the understanding of the basic ideas of the paper, the reader may skim over them in the first reading.

and

$$(2.6) \quad \mathfrak{G}_{ks}^2 = \sum_{\substack{\lambda_k \in \mathfrak{S}^1 \\ k \neq s}} i_{ks}^1(\lambda_k) = \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{S}^1} i_{sk}^1(\lambda_s).$$

$$(2.6a) \quad \mathfrak{D}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n \mathfrak{G}_{ks}^2$$

is the distinguished boundary surface of $\mathfrak{M}$.

Applying the theorem on implicit functions and that of HEINE-BOREL we can show that we can cover every $\mathfrak{G}_{ks}^2$ by denumerably many neighborhoods $\mathfrak{R}_{ks,\mu}^2$ (of the λ_k, λ_s -plane), $\mu = 1, 2, 3, \dots$ such that in every $\mathfrak{R}_{ks,\mu}^2$ the corresponding part of $\mathfrak{G}_{ks}^2$ can be represented in the form

$$(2.7) \quad z_m = \varphi_m(\lambda_k, \lambda_s) = h_k^m[Z_k^*(\lambda_k, \lambda_s), \lambda_k] = h_s^m[Z_s^*(\lambda_s, \lambda_k), \lambda_s], \quad m = 1, 2, \quad k \neq s.$$

Here Z_k^* and Z_s^* are single valued and continuously differentiable functions of λ_k and λ_s in a conveniently chosen domain $\mathfrak{U}_{ks,\mu}^2$ of the λ_k, λ_s -plane. The domain $\sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{U}_{ks,\mu}^2$ is a possibly completely or partially multicovered RIEMANN'S surface whose projection on the λ_k, λ_s -plane lies in

$$[0 \leq \lambda_k \leq 2\pi, \quad 0 \leq \lambda_s \leq 2\pi].$$

We write

$$(2.8) \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{U}_{ks,\mu}^2 = \mathfrak{U}_{ks}^2 = \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{S}^1} \mathfrak{U}_{ks}^1(\lambda_k) = \sum_{\lambda_s \in \mathfrak{S}^1} \mathfrak{U}_{sk}^1(\lambda_s).$$

Here $\mathfrak{U}_{ks}^1(\lambda_k)$ [the image of $\mathfrak{U}_{ks}^1(\lambda_k)$ in the λ_k, λ_s -plane], is completely or partially multiply covered set of $[0 \leq \lambda_s \leq 2\pi]$.

We assume that $\mathfrak{U}_{ks}^2$ is measurable and that $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)}$ for $(\lambda_k, \lambda_s) \in \mathfrak{U}_{ks}^2$ is bounded and the area of $\mathfrak{U}_{ks}^2$ is finite (Hypothesis 2, c*). (This assumption is stronger than the hypothesis 2, c of [5]).

Further we assume that there exists a domain say $\mathfrak{U}^2$ in the z_2 plane with the following properties: For $t_2 \in \mathfrak{U}^2$, $\mathfrak{M} \cap (z_2 = t_2)$ is not empty and its boundary is $\mathfrak{m}^3 \cap (z_2 = t_2)$ (Hypothesis 3, a). Every $\mathfrak{m}^3 \cap (z_2 = t_2)$, $t_2 \in \mathfrak{U}^2$, consists of finitely many I -arcs and finitely many K -points (Hypothesis 3, b).

Let $^3) Z_k = T_k^{(\mu)} = T_k^{(\mu)}(\lambda_k, t_2)$, $\mu = 1, 2, \dots$, be the solution of the equation

$$(2.9) \quad h_k^2(Z_k, \lambda_k) = t_2, \quad t_2 \in \mathfrak{U}^2,$$

and let

$$(2.9a) \quad z_1 = \zeta_1(\lambda_k, t_2) = h_k^1[T_k^{(\mu)}(\lambda_k, t_2), \lambda_k].$$

We assume that to the increasing λ_k corresponds the direction along the arc (2.9a) so that the domain $\mathfrak{M} \cap (z_2 = t_2)$ lies to the left (Hypothesis 3, c).

³⁾ $T_k^{(\mu)}(\lambda_k, t_2)$ is in general a multivalued function, and μ indicates the branch. However we shall omit in the future sometimes the index μ , e.g. we write ζ_1 instead of $\zeta_1^{(\mu)}$.

For $\frac{\partial \zeta_1(\lambda_k, t_2)}{\partial \lambda_k}$ the following representation holds:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial h_k^1}{\partial T_k^{(\mu)}} \frac{\partial T_k^{(\mu)}}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial h_k^1}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial (h_k^1, h_k^2)}{\partial (\lambda_k, T_k^{(\mu)})} : \frac{\partial h_k^2}{\partial T_k^{(\mu)}}$$

since from (2.9) we have:

$$\frac{\partial h_k^2}{\partial T_k^{(\mu)}} \frac{\partial T_k^{(\mu)}}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial h_k^2}{\partial \lambda_k} = 0.$$

According to **3, b** for every $t_2, t_2 \in \mathbb{U}^2$, there exist at most finitely many K -points which lie on $\mathbb{G}_{ks}^2 \cap (z_2 = t_2)$. For these points

$$(2.11) \quad h_k^2(Z_k, \lambda_k) = h_s^2(Z_s, \lambda_s) = t_2$$

holds. We assume (Hypothesis **3, d**) that in these points:

$$(2.12) \quad \frac{\partial h_k^2(Z_k, \lambda_k)}{\partial Z_k} \neq 0, \quad \frac{\partial h_s^2(Z_s, \lambda_s)}{\partial Z_s} \neq 0.$$

Let further the images of these K -points in the λ_k, λ_s -plane be the points

$$M^p \equiv \{\lambda_k^{(p)}, \lambda_s^{(p)}\}, \quad p = 1, 2, \dots, l.$$

In a sufficiently small λ_k, λ_s -neighborhood we have for $\varphi_2(\lambda_k, \lambda_s)$ the representation [see (2.7)]

$$(2.13) \quad \varphi_2 = t_2 + A_1(\lambda_k, \lambda_s) (\lambda_k - \lambda_k^{(p)}) + A_2(\lambda_k, \lambda_s) (\lambda_s - \lambda_s^{(p)})$$

where $A_m(\lambda_k, \lambda_s)$, $m = 1, 2$ are continuous functions defined in $\mathbb{U}_{ks,p}^2$. We assume (Hypothesis **3, e**) that there exist constants A^* and Θ^* such that

$$(2.14) \quad \min [|A_1(\lambda_k, \lambda_s)|, |A_2(\lambda_k, \lambda_s)|] \geq A^* > 0,$$

$$(2.15) \quad \pi - \Theta^* \geq |\arccos A_1(\lambda_k, \lambda_s) - \arccos A_2(\lambda_k, \lambda_s)| \geq \Theta^* > 0, \quad (\lambda_k, \lambda_s) \in \mathbb{U}_{ks,p}^2.$$

Under the above hypotheses it is possible to show that every analytic function $f(z_1, z_2)$ which is regular in $\mathfrak{M}$ can be represented in $\mathfrak{M}$ in the form

$$(2.16) \quad f(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathbb{B}_{ks}^1} \frac{f(\varphi_1, \varphi_2) B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s) d\lambda_k d\lambda_s}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)},$$

where

$$(2.17) \quad B_{ks} \equiv \frac{\Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s) \Phi_k(t_1, \varphi_2, \lambda_k) - \Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \Phi_s(t_1, \varphi_2, \lambda_s)}{(\varphi_1 - t_1)(\varphi_2 - t_2)} \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)}.$$

[See (2.1) and (2.7)]. (2.16) expresses the value of the function f in $\mathfrak{M}$ in terms of the values on the distinguished boundary surface. It can be considered as a generalization of CAUCHY formula. When compared with the formula

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t - z(\lambda)} \frac{dz(\lambda)}{d\lambda} d\lambda,$$

(2.16) has the disadvantage that its kernel

$$(2.18) \quad \frac{B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)}$$

depends upon the domain, and therefore in many instances we cannot operate with it so easily as in the case of one variable.

In the second part of the present section we derive formulas of another type which express the values of a function in $\mathfrak{M}$ in terms of its values on the distinguished boundary surface.

§ 3. A representation of functions $f(z_1, z_2)$ in terms of their values on the distinguished boundary surface.

LEMMA 2.1. *With every point (t_1, t_2) of the domain $\overline{\mathfrak{M}}$ we can associate bounded functions $M_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ such that for $B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ [see (2.17)], the inequality*

$$(2.19) \quad |B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)| \leq M_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s) < \infty, \quad (t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}},$$

holds.

PROOF. Let us consider at first the expression $\frac{\Phi_s(t_1, \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s), \lambda_s)}{\varphi_1(\lambda_k, \lambda_s) - t_1}$ for a fixed λ_k, λ_s . $\Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)$ is defined for all values of $(t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\Phi_s(t_1, \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s), \lambda_s)$ is defined at the points t_1 such that $(t_1, t_2 = \varphi_2) \in \mathfrak{P}_1^2(\varphi_2)$, the intersection of $\overline{\mathfrak{M}}$ with the plane⁴⁾ $t_2 = \varphi_2$, and vanishes for $t_1 = \varphi_1$.

$\Phi_2(t_1, \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s), \lambda_s)$ is a regular function of t_1 , therefore it must have a factor $t_1 - \varphi_1(\lambda_k, \lambda_s)$.

We consider

$$(2.20) \quad \frac{\Phi_k(t_1, \varphi_2, \lambda_k) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s) - \frac{\Phi_s(t_1, \varphi_2, \lambda_s)}{\varphi_1(\lambda_k, \lambda_s) - t_1} \Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k)}{\varphi_2(\lambda_k, \lambda_s) - t_2}$$

as a function of t_2 , $(t_1 = \varphi_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{P}}_2^2(\varphi_1)$. (See ⁴⁾). For $t_2 = \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s)$ the numerator vanishes and therefore it must have a factor $t_2 - \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s)$. Therefore, and in consequence of the hypothesis **2, c***, see p. 176, for $(t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$ there exists an upper bound $M_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ for $|B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)|$.

LEMMA 2.2. *A function $f(z_1, z_2)$ of two complex variables which is regular in $\mathfrak{M}$ and continuous in $\overline{\mathfrak{M}}$ satisfies the inequality*

$$(2.21) \quad |f(t_1, t_2)| \leq \frac{(n(n-1))^{\frac{1}{2}}}{2(2\pi)^2} [\mu(t_1, t_2)]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{P}_{ks}^2} |f(\varphi_1, \varphi_2)|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right]^{\frac{1}{2}},$$

where $\mu(t_1, t_2)$ is an upper bound for

$$(2.22) \quad \left\{ \iint_{\mathfrak{P}_{ks}^2} \frac{M_{ks}^2(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{|\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)|^2} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad k \neq s.$$

⁴⁾ In a similar way we introduce the domain $\mathfrak{P}_2^2(\varphi_1)$ the intersection of $\overline{\mathfrak{M}}$ with the plane $t_1 = \varphi_1(\lambda_k, \lambda_s)$. See also (2.7).

PROOF. As it has been shown in [5], $f(t_1, t_2)$ can be represented in $\mathfrak{M}$ in the form (2.16). By SCHWARZ inequality and Lemma 2.1 follows from (2.16)

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{aligned} |f(t_1, t_2)| &\leq \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \left[\iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} |f(\varphi_1, \varphi_2)|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} \frac{M_{k,s}^2(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{|\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)|^2} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{8\pi^2} (\mu(t_1, t_2))^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \left[\iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} |f(\varphi_1, \varphi_2)|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{8\pi^2} (\mu(t_1, t_2))^{\frac{1}{2}} \binom{n(n-1)}{2} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} |f(\varphi_1, \varphi_2)|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

REMARK. Deriving the last expression we use the fact that

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\kappa=1}^M |a_{\kappa}| \right]^2 &= \sum_{\kappa=1}^M |a_{\kappa}| + \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa < \varrho}}^M \sum_{\varrho=1}^M 2 |a_{\kappa}|^{\frac{1}{2}} |a_{\varrho}|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{\nu=1}^M |a_{\nu}| + \sum_{\nu=1}^{M-1} \left[\sum_{\kappa=\nu}^M (|a_{\kappa}| + |a_{\kappa+\nu}|) \right] \\ &= M \left(\sum_{\kappa=1}^M |a_{\kappa}| \right), \quad M = \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

THEOREM 2.1. Let $\Phi_{\nu}(z_1, z_2)$, $\nu=1, 2, \dots$ be a set of functions which are regular in $\mathfrak{M}$, continuous in $\overline{\mathfrak{M}}$ and orthonormal in the sense that the integral over the distinguished boundary surface:

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{aligned} [\Phi_{\nu}, \overline{\Phi_{\mu}}]_{\mathfrak{D}^2} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} \Phi_{\nu}(\varphi_1, \varphi_2) \overline{\Phi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_2)} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \\ &= \delta_{\nu\mu} \quad \begin{cases} = 1 & \text{if } \nu = \mu, \\ = 0 & \text{if } \nu \neq \mu. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Then the kernel function

$$(2.25) \quad \hat{K}(z_1, z_2; \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_{\nu}(z_1, z_2) \overline{\Phi_{\nu}(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)}$$

of this system converges absolutely at every interior point of the domain and uniformly in every closed subdomain of $\mathfrak{M}$.

PROOF. We set $\hat{K}_n(z_1, z_2; \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2) = \sum_{\nu=1}^n \Phi_{\nu}(z_1, z_2) \overline{\Phi_{\nu}(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)}$. We shall show that $\hat{K}_n(z_1, z_2; \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)$ is uniformly bounded in every closed subdomain of $\mathfrak{M}$, independently of n . If $f(z_1, z_2)$ is analytic in $\overline{\mathfrak{M}}$ and if $(t_1, t_2) \in \mathfrak{M}$, then according to the lemma 2.2

$$(2.26) \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} |f(\varphi_1, \varphi_2)|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \geq \delta(t_1, t_2) |f(t_1, t_2)|^2$$

[see (2.7)] where

$$\delta(t_1, t_2) = \frac{2(8\pi^2)^2}{n(n-1)} \frac{1}{\mu(t_1, t_2)} > 0.$$

[Concerning μ see (2.21), (2.22).] From (2.26) we conclude that if $\{\Phi_\nu(z_1, z_2)\}$ is a system of functions which are regular in $\mathfrak{M}$ and orthonormalized in the sense of (2.24), then

$$(2.27) \quad \sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu(t_1, t_2)|^2 \leq [\delta(t_1, t_2)]^{-1}.$$

For choosing $f(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^N \Phi_\nu(z_1, z_2) \overline{\Phi_\nu(t_1, t_2)}$ we obtain according to (2.23)

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu(t_1, t_2)|^2 \right)^2 \\ & \leq \frac{n(n-1)}{2(8\pi^2)^2} \mu(t_1, t_2) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} \left| \sum_{\nu=1}^N \Phi_\nu(\varphi_1, \varphi_2) \overline{\Phi_\nu(t_1, t_2)} \right|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s. \end{aligned} \right.$$

Hence using the orthogonality relations, see (2.24), we have

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2(8\pi^2)^2}{n(n-1)} \frac{1}{\mu(t_1, t_2)} \left(\sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu(t_1, t_2)|^2 \right)^2 \\ & \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} \left| \sum_{\nu=1}^N \Phi_\nu(\varphi_1, \varphi_2) \overline{\Phi_\nu(t_1, t_2)} \right|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \\ & = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \Phi_\nu(t_1, t_2) \overline{\Phi_\mu(t_1, t_2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} \overline{\Phi_\nu(\varphi_1, \varphi_2)} \Phi_\mu(\varphi_1, \varphi_2) \times \\ & \quad \times \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s = \sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu(t_1, t_2)|^2. \end{aligned} \right.$$

Since $\sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu(t_1, t_2)|^2 \neq 0$,

$$(2.30) \quad \frac{2(8\pi^2)^2}{n(n-1)} \frac{1}{\mu(t_1, t_2)} \sum_{\nu=1}^N |\Phi_\nu(t_1, t_2)|^2 \leq 1.$$

REMARK. It is clear that in addition to the orthogonal functions introduced in the present paper we can introduce functions $\psi_\nu(z_1, z_2)$, $\nu = 1, 2, \dots$, which are orthonormal in the sense that

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{\psi_\nu, \bar{\psi}_\mu\} \equiv \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{B}_{k,s}^1} \psi_\nu(\varphi_1, \varphi_2) \overline{\psi_\mu(\varphi_1, \varphi_2)} W(\varphi_1, \varphi_2) \times \\ & \quad \times \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s = \delta_{\nu\mu}, \end{aligned} \right.$$

where $W(\varphi_1, \varphi_2)$ is a *positive* continuous weighting function defined on the distinguished boundary surface.

§ 4. A special set of orthonormal functions. We proceed now to a construction of a set of orthonormal functions each of which is regular in $\overline{\mathfrak{M}}$. This set is complete for the class of functions which are regular in $\overline{\mathfrak{M}}$.

We make the (additional) hypothesis 4: There exist functions

$$\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k + i\lambda_k^*), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

regular for $(t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$ and continuous in $\lambda_k + i\lambda_k^*$, such that 1°.

$$(2.32) \quad \Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k + i\lambda_k^*) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

for every fixed λ_k^* , $0 < \lambda_k^* \leq p$ ($p > 0$, sufficiently small) are analytic hyper-surfaces which lie completely outside of $\overline{\mathfrak{M}}$, 2°. for $\lambda_k^* = 0$ are identical with the functions considered on p. 175, see (2.1).

We determine on every surface $\mathfrak{B}_{ks}^2$ a set of points $(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$, $v = 1, 2, \dots$, which with increasing v becomes denser and denser. Further for every N we determine in $\mathfrak{B}_{ks}^2$ surface segments $\mathfrak{A}_N^2(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$, $v \leq N$, $\sum_{v=1}^N \mathfrak{A}_N^2(\lambda_k^v, \lambda_s^v) = \mathfrak{B}_{ks}^2$; such that the projection of every $\mathfrak{A}_N^2(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$ on the λ_k, λ_s -plane includes in its interior the point $(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$, but *do not* include any other point $(\lambda_k^\mu, \lambda_s^\mu)$, $\mu = 1, 2, \dots, v-1, v+1, \dots, N$. We denote by $\Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$ the area of the projection of $\mathfrak{A}_N^2(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$ on the λ_k, λ_s -plane. The $(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$ are chosen in such a way that $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v) = 0$, uniformly in v .

Let $f(z_1, z_2)$ be a function of two complex variables which is regular in $\overline{\mathfrak{M}}$. For $(t_1, t_2) \in \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, every of the integrals on the right hand side of (2.16) can be uniformly approximated by

$$(2.33) \quad \sum_{v=1}^N \frac{f(\varphi_1^v, \varphi_2^v) B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k^v, \lambda_s^v)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v)} \Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$$

where $(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$, $v = 1, 2, \dots$, is a sufficiently dense set of points on $\mathfrak{B}_{ks}^2$ and $\varphi_\kappa^v = \varphi_\kappa(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$, $\kappa = 1, 2$.

We approximate now the sum (2.33) by

$$(2.34) \quad \left\{ \sum_{v=1}^N \frac{f(\varphi_1^v, \varphi_2^v) B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k^v, \lambda_s^v)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v + i2^{-v}p) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v + i2^{-v}p)} \Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v), \quad p > 0, \right. \\ \left. \text{small enough.} \right.$$

By the hypothesis 4 and according to the considerations of [5] every term

$$(2.35) \quad \frac{B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k^v, \lambda_s^v)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v + i2^{-v}p) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v + i2^{-v}p)}, \quad p > 0,$$

is a regular function for $(t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}}$. Since the $B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k^v, \lambda_s^v)$, $v=1, 2, \dots, N$, are regular for $(t_1, t_2) \in \mathfrak{M}$ it suffices to show that

$$(2.36) \quad \left\{ \sum_{v=1}^N [|\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v + i 2^{-v} p) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v + i 2^{-v} p)|^{-1} - |\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v)|^{-1}] \Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v) \right.$$

goes to zero for $N \rightarrow \infty$, and $(t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}}_1 \subset \mathfrak{M}$.

As we mentioned before with increasing N the $\Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$ go to zero (uniformly in v). On the other hand for every fixed ε , there exists only a finite number of points $(\lambda_k^v, \lambda_s^v)$, say $v=1, 2, \dots, T$, for which

$$(2.37) \quad \left\{ |[\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v + i 2^{-v} p) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v + i 2^{-v} p)]^{-1} - [\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v)]^{-1}| > \varepsilon. \right.$$

If we denote by m the maximum of the left hand side of (2.37) for $(t_1, t_2) \in \overline{\mathfrak{M}}_1$ then (2.36) will be smaller than

$$(2.38) \quad m \left[\sum_{v=1}^T \Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v) \right] + \varepsilon A(\mathfrak{B}_{ks}^2)$$

where $A(\mathfrak{B}_{ks}^2)$ denotes the area of the projection of $\mathfrak{B}_{ks}^2$ on the λ_k, λ_s -plane.

(Note that T is independent of N .) With increasing N , $\sum_{v=1}^T \Delta_N(\lambda_k^v, \lambda_s^v) \rightarrow 0$ and therefore for every ε we can determine an N so that (2.38) becomes smaller than $2\varepsilon A(\mathfrak{B}_{ks}^2)$. Since ε can be chosen arbitrarily small, (2.36) goes to zero for $\varepsilon \rightarrow 0$.

Thus we obtain the

THEOREM 2.2. *By orthogonalizing in the sense (2.24) the functions*

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k^v, \lambda_s^v)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k^v + i 2^{-v} p) \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s^v + i 2^{-v} p)} \quad p > 0, \text{ small enough,} \\ v = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad s \neq k, \end{array} \right.$$

we obtain a system of orthonormal functions each of which is regular in $\mathfrak{M}$. This system is complete for the class of functions $f(t_1, t_2)$ which are regular in $\mathfrak{M}$.

For every domain $\mathfrak{M}$ which admits a group of transformations

$$(2.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1^* = q_1(z_1, z_2, \varepsilon), \quad z_2^* = q_2(z_1, z_2, \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ q_\kappa(z_1, z_2, 0) = z_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, \end{array} \right.$$

which transforms $\mathfrak{M}$ into a domain $\mathfrak{M}_\varepsilon > \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_0$ (e.g. for every convex domain) the theorems which were proved for the class of functions which are regular in $\mathfrak{M}$, hold also for functions which have on the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$ [see (2.6a)] boundary values almost everywhere, and for which $[f, \bar{f}] < \infty$. We shall denote this class by $\tilde{L}^2(\mathfrak{M})$. Indeed, if we replace $f(z_1, z_2)$ by $f_\varepsilon(z_1, z_2) = f[q_1(z_1, z_2, \varepsilon), q_2(z_1, z_2, \varepsilon)]$ for $\varepsilon > 0$, f_ε is regular in $\mathfrak{M}$. Since $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f_\varepsilon, \bar{f}_\varepsilon] = [f, \bar{f}]$ our assertion follows. Here $[,] \equiv [,]_{\mathfrak{D}^2}$.

§ 5. An application to the theory of meromorphic functions.

THEOREM 2.3. Let $g_\nu(t_1, t_2)$, $\nu=1, 2, \dots, m$, be a (finite) set of functions which are regular in $\mathfrak{M}$ and orthonormalized in the sense (2.24). Suppose that the function $f(t_1, t_2)$, $f \in \tilde{L}^2(\mathfrak{M})$ is orthogonal to the $g_\nu(t_1, t_2)$, i.e. ^{4a)} $[f, \bar{g}_\nu] = 0$ for $\nu=1, 2, \dots, m$. Then

$$(2.41) \quad |f(t_1, t_2)|^2 \leq [f, \bar{f}] \left(\hat{K}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) - \sum_{\nu=1}^m |g_\nu(t_1, t_2)|^2 \right).$$

PROOF. Since the g_ν , $\nu=1, 2, \dots, m$, are orthonormal we can determine a system $\{\chi_\mu\}$, $\mu=1, 2, \dots$ of orthonormal functions, such that the χ_μ are orthonormal to g_ν , i.e. that $[g_\nu, \bar{\chi}_\mu] = 0$ for every ν and μ , and such that $(\{g_\nu\} + \{\chi_\mu\})$ forms a set complete for the functions of the class $\tilde{L}^2(\mathfrak{M})$. Then it holds

$$(2.42) \quad f(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^m [f, \bar{g}_\nu] g_\nu(t_1, t_2) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f, \bar{\chi}_\nu] \chi_\nu(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [f, \bar{\chi}_\nu] \chi_\nu(t_1, t_2).$$

Since

$$\sum_{\nu=1}^m |g_\nu(t_1, t_2)|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\chi_\nu(t_1, t_2)|^2 = \hat{K}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$$

the inequality (2.41) follows.

Let $M(t_1, t_2)$ be a meromorphic function of t_1, t_2 in $\mathfrak{M}$, which possesses the boundary values on $\mathfrak{D}^2$ almost everywhere and such that $[M, \bar{M}] < \infty$. Let $\{\varphi_\nu(t_1, t_2)\}$ be a complete set of orthonormal functions, which are regular in $\mathfrak{M}$.

Let further

$$(2.43) \quad m(t_1, t_2) = M(t_1, t_2) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(t_1, t_2) [M, \bar{\varphi}_\nu].$$

Then the (meromorphic) function $m(t_1, t_2)$ has the property that

$$(2.44) \quad [m, \bar{f}] = 0$$

for every function $f \in \tilde{L}^2(\mathfrak{M})$.

Indeed for every function $\varphi_\mu(t_1, t_2)$ of our system, we have

$$(2.45) \quad \left[\left(M(t_1, t_2) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(t_1, t_2) [M, \bar{\varphi}_\nu] \right), \overline{\varphi_\mu(t_1, t_2)} \right] = [M, \bar{\varphi}_\mu] - [M, \bar{\varphi}_\mu] = 0.$$

Since for $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu \in \tilde{L}^2(\mathfrak{M})$ we can integrate term by term, the relation (2.44) follows.

We shall call the functions m , satisfying for every $f \in \tilde{L}^2(\mathfrak{M})$ the relation (2.44) as *normalized with respect to the class $\tilde{L}^2(\mathfrak{M})$* .

^{4a)} In the following in this section we omit the subscript $\mathfrak{D}^2$ in $[,] \mathfrak{D}^2$.

We have proved:

THEOREM 2.4. Let M be a function which is meromorphic in $\mathfrak{M}$, and m the corresponding function normalised with respect to $\tilde{L}^2(\mathfrak{M})$. If $f = M - m$, see (2.43), then

$$(2.46) \quad [M, \bar{M}] = [m, \bar{m}] + [f, \bar{f}].$$

§6. The method of the minimum integral in the case of the metric (2.24). The method based on the use of orthonormal systems seems to gain importance in recent investigations in the theory of functions of several complex variables⁵⁾. The object of this section is to show how the method of the minimum integral (see [7], chapter III) has to be modified for functions which are orthonormal with respect to metric (2.24) (orthonormalization over the distinguished boundary surface). In this connection it is useful to employ a slightly different class of functions than those considered in § 3 [see (2.24)]. In order to do this we have to limit ourselves to a special class of domains which we shall denote by $\mathfrak{M}_I$ and which, in addition to the hypotheses 1, 2, 3 formulated in § 2 (see also [4, 5]), satisfy the following hypotheses.

5.1. There exists a sequence of domains $\mathfrak{M}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$, $\mathfrak{M}_\kappa \subset \mathfrak{M}_{\kappa+1}$, each of which has the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}_\kappa^2$ and satisfies the hypotheses 1, 2, 3. Each $\mathfrak{D}_\kappa^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \mathfrak{G}_{k s, \kappa}^2$ has the same structure as $\mathfrak{D}^2$ (see § 2).

In particular, each $\mathfrak{G}_{k s, \kappa}^2 = \mathfrak{S} \mathfrak{R}_{k s, \kappa \mu}^2$ where $\mathfrak{R}_{k s, \kappa \mu}^2$ can be represented in the form $z_m = \varphi_{m, \kappa}(\lambda_k, \lambda_s)$, $m = 1, 2$. The $\varphi_{m, \kappa}(\lambda_k, \lambda_s)$ converge uniformly to $\varphi_m(\lambda_k, \lambda_s)$. We assume further that $\mathfrak{M}_\kappa$ and $\mathfrak{G}_{k s, \kappa}^2$ converge (in the sense of FRÉCHET) to $\mathfrak{M}_I$ and $\mathfrak{G}_{k s, I}^2$, respectively.

5.2. We associate with every domain $\mathfrak{M}_\kappa$ a function $\mu_\kappa(t_1, t_2)$ introduced in lemma 2.2 [see (2.21)] and we assume that in every subdomain $\mathfrak{E}$ which lies completely inside of $\mathfrak{M}$, the $\mu_\kappa(t_1, t_2)$, $\kappa = 1, 2, \dots$ are uniformly bounded, i.e., to every $\mathfrak{E}$ there exists a constant $C_1 = C_1(\mathfrak{E})$ such that

$$(2.47) \quad \frac{n(n-1)}{128\pi^4} \mu_\kappa(t_1, t_2) \leq C_1, \quad (t_1, t_2) \in \mathfrak{E}, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

[see (2.23)].

DEFINITION. A function $f(z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \in \mathfrak{M}_I$, which is regular in $\mathfrak{M}_I$ will be said to belong to the class $\hat{L}^2(\mathfrak{M}_I)$ if

$$(2.48) \quad \{f, \bar{f}\}_{\mathfrak{D}_I^2} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \int \int_{\mathfrak{B}_{k s, \kappa}^2} |f(\varphi_{1, \kappa}, \varphi_{2, \kappa})|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_{1, \kappa}, \varphi_{2, \kappa})}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s < \infty.$$

⁵⁾ See, e.g., BERGMAN [1, 6, 7, 8, 9], BREMERMAN [12], DAVIS [13], MASCHLER [14a], NEHARI [16]. In a number of papers (see [15]) and publications mentioned there Mr. H. MESCHKOWSKI applied the methods based on the theory of orthogonal functions for the study of analytic functions of one complex variable. It is of considerable interest that many of his results (with the necessary modifications) hold in the case of functions of two (and more) complex variables, in particular when these functions are considered in domains with a distinguished boundary surface.

THEOREM 2.5. *Let $\mathfrak{M}_I$ be a domain which satisfies hypotheses 1-3, 5. Further, let $\mathfrak{M}$ be a domain with the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$ whose closure lies completely inside $\mathfrak{M}_I$.*

Then for every $f \in \hat{L}^2(\mathfrak{M}_I)$ the inequality

$$(2.49) \quad [f, \bar{f}]_{\mathfrak{D}^2} \leq C_2 A \{f, \bar{f}\}_{\mathfrak{D}_I^2}$$

holds [see (2.24) and (2.48)]. Here A is the "area" of the projection of $\mathfrak{D}^2$, and C_2 is a constant depending only on $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}_I$.

PROOF. Let $\mathfrak{M}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$ be a sequence of domains converging in the sense indicated in 5.1 to $\mathfrak{M}_I$. Let us consider $f(z_1, z_2)$ in the domain $\mathfrak{M}_\kappa$, $\kappa < \infty$. The function $f(z_1, z_2)$ is regular in $\mathfrak{M}_\kappa$ and therefore according to (2.23) at every point $(t_1, t_2) \in \mathfrak{D}^2$ the inequality

$$(2.50) \quad |f(t_1, t_2)|^2 \leq C \mu_\kappa(t_1, t_2) \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k+s}}^n \sum_{s=1}^n \iint_{\mathfrak{M}_{k+s, \kappa}^2} |f(\varphi_{1, \kappa}, \varphi_{2, \kappa})|^2 \left| \frac{\partial(\varphi_{1, \kappa}, \varphi_{2, \kappa})}{\partial(\lambda_k, \lambda_s)} \right| d\lambda_k d\lambda_s \right],$$

$$C \equiv n(n-1)/128\pi^4.$$

holds for κ large enough. Since for κ large enough $\overline{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}_\kappa \subset \mathfrak{M}_I$

$$(2.51) \quad |f(t_1, t_2)|^2 \leq C \mu_\kappa [f, \bar{f}]_{\mathfrak{D}_\kappa^2} \leq C(\mu + \varepsilon) \{f, \bar{f}\}_{\mathfrak{D}_I^2}.$$

Since ε can be made arbitrarily small, by integrating (2.51) over $\mathfrak{D}^2$, (2.49) follows.

When considering functions which are orthonormal when integrating over the domain, i.e., functions $\Phi_\nu(z_1, z_2)$ for which

$$(2.52) \quad \iiint_{\mathfrak{M}} \Phi_\nu \bar{\Phi}_\mu d x_1 d y_1 d x_2 d y_2 = \delta_{\nu\mu}, \quad z_k = x_k + i y_k, \quad k = 1, 2,$$

we connected the theory of these functions with the method of the minimum integral (see, in particular, [7] p. 40ff.). Most of these considerations are rather of a formal nature and can immediately be repeated in the case of functions which are orthonormal in the sense of the metric (2.48). However, a modification of the procedure is needed. In the case of the metric (2.52), if we consider the minimum $\lambda_{\mathfrak{M}}$ of $\iiint_{\mathfrak{M}} |f|^2 d x_1 d y_1 d x_2 d y_2$ for functions f , satisfying at a point $(t_1, t_2) \in \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}_I$ certain conditions, the inequality

$$(2.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\mathfrak{M}} \equiv \iiint_{\mathfrak{M}} |f_{\mathfrak{M}}|^2 d x_1 d y_1 d x_2 d y_2 \leq \iiint_{\mathfrak{M}} |f_{\mathfrak{M}_I}|^2 d x_1 d y_1 d x_2 d y_2 \\ \leq \iiint_{\mathfrak{M}_I} |f_{\mathfrak{M}_I}|^2 d x_1 d y_1 d x_2 d y_2 \equiv \lambda_{\mathfrak{M}_I} \end{array} \right.$$

holds (see [7], p. 44). Here $f_{\mathfrak{M}}$ (and $f_{\mathfrak{M}_I}$) is the function which minimizes the above integral, under conditions specified in [7] pp. 41ff. $\lambda_{\mathfrak{M}}$ depends monotonically upon the domain $\mathfrak{M}$.

In the case of orthonormal functions considered in the present section we have to replace the inequality $\lambda_{\mathfrak{M}} \leq \lambda_{\mathfrak{M}_I}$ for $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_I$ [see (2.53)] by the inequality (2.49). If in particular, we then choose for $\mathfrak{D}^2$, the distinguished

boundary surface of a bicylinder, whose closure lies in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}^2 = [z_k = \varrho \exp(i\varphi_k), k=1, 2]$ and for which the kernel function in an explicit form is known, using (2.49) we can determine lower bounds for $\{f, \bar{f}\}_{\mathfrak{D}_k^2}$ which are positive.

In a similar manner we can determine upper bounds for the $\lambda_{\mathfrak{M}_I}$.

Thus most of the results which one can obtain by using the method of the minimum integral hold in a modified form also in the case of the metric (2.49).

III. The relations between the value distribution of a function $f(z_1, z_2)$ in the domain $\mathfrak{M}$ and on its boundary $\mathfrak{m}^3$.

§ 1. Bounds for $|f(z_1, z_2)|$ in an analytic surface which intersect the boundary hypersurface $\mathfrak{i}_k^3$ along a closed curve. In the previous section we discussed the connection between the behavior of a function on the distinguished boundary surface and in the interior of a domain $\mathfrak{M}$ possessing such a surface. The boundary $\mathfrak{m}^3$ of the (*four-dimensional*) domain $\mathfrak{M}$ consists of the (*two-dimensional*) distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$ and of the (*three-dimensional*) complementary part $\mathfrak{b}^3 = \mathfrak{m}^3 - \mathfrak{D}^2$. There arises a problem to investigate the relations between the behavior of the function f inside the domain $\mathfrak{M}$ and in $\mathfrak{b}^3$. It is of interest that relations of this type have in many instances a completely different character than those obtained in the case of one variable, when investigating the relations between the behavior of a function $f(z)$ (of one variable) inside a domain and on its boundary curve. We proceed now to the description of certain properties of segments of the boundary $\mathfrak{b}^3$, which properties play a role for the purposes mentioned above.

As we indicated in § II, 2, $\mathfrak{m}^3 = \sum_{k=1}^n \mathfrak{i}_k^3$ where

$$(3.1) \quad \mathfrak{i}_k^3 = \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{S}^1} \overline{\mathfrak{S}}_k^2(\lambda_k), \quad \mathfrak{S}^1 = [0 \leq \lambda_k \leq 2\pi],$$

whereby

$$(3.1a) \quad \overline{\mathfrak{S}}_k^2(\lambda_k) = [z_\nu = h_\nu^k(Z_k, \lambda_k), \nu = 1, 2].$$

Let us assume that every $\overline{\mathfrak{S}}_k^2(\lambda_k)$ is a simply-connected (closed) domain and for every λ_k , $0 \leq \lambda_k \leq 2\pi$, the point $A_k(\lambda_k) = [z_\nu = h_\nu^k(0, \lambda_k), \nu = 1, 2]$ corresponds to the origin $Z_k = 0$. We assume further that the representation (3.1a) of the $\overline{\mathfrak{S}}_k^2(\lambda_k)$ is arranged in such a way that for every λ_k , $0 \leq \lambda_k < 2\pi$, Z_k varies in $|Z_k| \leq 1$. In this case we shall say that the representation of the segment $\mathfrak{i}_k^3$ is *normalized with respect to the axis* $\mathfrak{f}_k^1 = \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{S}^1} A_k(\lambda_k)$. Let us assume further that a closed curve

$$(3.2) \quad \mathfrak{p}_k^1 = \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{S}^1} P_k(\lambda_k), \quad P_k(\lambda_k) = [z_\nu = h_\nu^k(\tau_k(\lambda_k), \lambda_k), \nu = 1, 2]$$

[where $\tau_k(\lambda_k)$, $0 \leq \lambda_k \leq 2\pi$ is a continuous (single-valued) function of λ_k] is given⁶⁾ on $\mathfrak{i}_k^3$. If $|\tau_k(\lambda_k)| \leq r$, $0 \leq \lambda_k < 2\pi$, $r < 1$, the curve $\mathfrak{p}_k^1$ lies in the segment

⁶⁾ Here we assume, that also $\mathfrak{S}_k^2(0) = \mathfrak{S}_k^2(2\pi)$ and therefore $h_\nu^k(Z_k, 0) = h_\nu^k(Z_k, 2\pi)$, $\nu = 1, 2$.

$\mathfrak{t}_k^3 < \mathfrak{i}_k^3$ whose representation can be written

$$(3.3) \quad \mathfrak{t}_k^3 = [z_v = h_v^k(Z_k, \lambda_k), |Z_k| < r, v = 1, 2].$$

In this case we shall say that $\mathfrak{t}_k^3$ has a representation normalized with respect to the axis $\mathfrak{t}_k^1$ and in this representation it is of radius r .

THEOREM 3.1. Suppose that the intersection of an analytic surface $\mathfrak{U}_0^2 \equiv [z_v = g_v(\zeta), v = 1, 2]$ with the boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$ is a closed curve $\mathfrak{p}_k^1 = [z_v = g_v(\exp(i\varphi)), 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$ which lies in the segment $\mathfrak{i}_k^3$.

Let us further make the following assumptions:

1. $\mathfrak{p}_k^1$ lies in a segment $\mathfrak{t}_k^3$ which when its representation is normalized with respect to the axis $\mathfrak{t}_k^1$ is of radius r , $r < 1$.

2. An analytic function $f(z_1, z_2)$ is given which is regular in $\overline{\mathfrak{M}}$, and omits in $\overline{\mathfrak{i}_k^3}$ the values 0 and 1.

3. Along the axis $\mathfrak{t}_k^1$ of $\mathfrak{t}_k^3$, f assumes values which belong to a bounded (closed) domain $\mathfrak{P}_0^2$, such that the points (0), (1) $\notin \mathfrak{P}_0^2$.

Then in $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U}_0^2 \cap \mathfrak{M}$

$$(3.4) \quad |f(z_1, z_2)| \leq \exp[A(\mathfrak{P}_0^2)(1-r)^{-1}]$$

where $A(\mathfrak{P}_0^2)$ is a "universal" positive constant which is finite for every domain $\mathfrak{P}_0^2$.

PROOF. As we indicated in § 2, $\mathfrak{i}_k^3$ is the sum of segments $\mathfrak{S}_k^2(\lambda_k)$ of analytic surfaces. In every segment $\mathfrak{S}_k^2(\lambda_k)$ the function $F_k(Z_k, \lambda_k) \equiv f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]$, $|Z_k| \leq 1$, for $0 \leq \lambda_k \leq 2\pi$, considered as a function of Z_k assumes at the point $Z_k = 0$ values belonging to $\overline{\mathfrak{P}_0^2}$; in the circle $|Z_k| \leq 1$, $F_k(Z_k, \lambda_k)$ omits the values 0 and 1. Consequently by the theorem of SCHOTTKY (see [16] p. 198) we have

$$(3.5) \quad f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)] \leq \exp[A(\mathfrak{P}_0^2)(1-r)^{-1}].$$

According to our hypothesis, the boundary $\mathfrak{p}_k^1$ of the segment $\mathfrak{U}^2 = [z_1 = g_1(\zeta), z_2 = g_2(\zeta), |\zeta| \leq 1]$ consists of points which lie in the segment $\mathfrak{t}_k^3$ of an analytic hypersurface. Since further in $\mathfrak{U}^2$ the function $f = f[g_1(\zeta), g_2(\zeta)]$ is an analytic function of a complex variable ζ , the same inequality (5) holds in every interior point of the segment $\mathfrak{U}^2$.

In the Theorem 3.1 we assumed that f was regular in the (closed) domain $\overline{\mathfrak{M}}$. If we make some additional hypotheses about the structure of $\mathfrak{M}$, then it is possible to obtain an analogous result for functions which are regular in $\mathfrak{M}$ and continuous in $\overline{\mathfrak{M}}$.

We assume that for every t , $0 < t \leq p$, p sufficiently small

$$[z_\kappa = h_\kappa^k(Z_k, \lambda_k - it), Z_k \in \mathfrak{B}_k^2(\lambda_k, t), \kappa = 1, 2], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

form the boundary of a domain $\mathfrak{M}_t$ which lies completely inside of $\mathfrak{M}$ and has the same structure as $\mathfrak{M}$. In particular, the $\mathfrak{B}^2(\lambda_k, t)$ are simply connected domains (which for $t=0$ become unit circles). The boundary curves of the $\mathfrak{B}^2(\lambda_k, t)$, when t varies, change continuously.

For $t=0$, $[z_\kappa = h_\kappa^k(Z_k, \lambda_k), \kappa=1, 2, |Z_k| < 1]$ are as before the segments of analytical hypersurfaces which form the boundary of $\mathfrak{M}$.

COROLLARY. If $f(z_1, z_2)$ is regular in $\mathfrak{M}$, continuous in $\overline{\mathfrak{M}}$, then in $\mathfrak{S}_k^2(\lambda_k)$, $f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]$ for every fixed λ_k is an analytic function of one complex variable Z_k , which is regular in $|Z_k| < 1$.

Indeed, for $t > 0$, the segment $z_\kappa = h_\kappa^k(Z_k, \lambda_k - it)$ lies in $\mathfrak{M}$ and therefore $f[h_1^k(Z_k, \lambda_k - it), h_2^k(Z_k, \lambda_k - it)]$ is an analytic function of Z_k . Therefore for every closed curve $\mathfrak{C}^1$ in the Z_k plane we have

$$\int_{\mathfrak{C}^1} f[h_1^k(Z_k, \lambda_k - it), h_2^k(Z_k, \lambda_k - it)] dZ_k = 0.$$

Since f is assumed to be (uniformly) continuous the above integral must vanish also for $t=0$, and therefore by the MORRERA theorem $f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]$ is an analytic function of the variable Z_k .

§2. A generalization of results of §1 to the case of surfaces which intersect $\mathfrak{m}^3$ along a curve belonging to two segments, $\mathfrak{i}_k^3$ and $\mathfrak{i}_s^3$, $k \neq s$. We proceed now to the case where the segment $\overline{\mathfrak{Q}^2}$ of an analytic surface intersects $\mathfrak{m}^3$ along curves which lie in two (or more) segments of analytic hypersurfaces $\mathfrak{i}_k^3$ and the intersection of their closures⁷⁾, say in $\mathfrak{i}_1^3$, $\mathfrak{i}_2^3$, and $\mathfrak{i}_1^3 \cap \mathfrak{i}_2^3$.

More specifically, we shall assume that the intersection of an analytic surface $\mathfrak{Q}_0^2$ with $\overline{\mathfrak{M}}$ satisfies the following conditions.

1. This intersection is a segment

$$(3.6) \quad \overline{\mathfrak{Q}^2} \equiv \mathfrak{Q}_0^2 \cap \overline{\mathfrak{M}} = [z_v = g_v(\zeta), v=1, 2, |\zeta| \leq 1].$$

Here $g_v(\zeta)$ are analytic functions which are regular in $|\zeta| < 1$ and continuous in $|\zeta| \leq 1$.

2. The intersection of $\overline{\mathfrak{Q}^2}$ with the boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$ consists of two segments $\mathfrak{a}_1^1$ and $\mathfrak{a}_2^1$, $\mathfrak{a}_k^1 \subset \overline{\mathfrak{i}_k^3}$, $k=1, 2$. The boundary curve $\mathfrak{a}^1$ of $\mathfrak{Q}^2$ is $\mathfrak{m}^3 \cap \overline{\mathfrak{Q}^2} = \bigcup_{k=1}^2 \mathfrak{a}_k^1$. The representation of $\mathfrak{Q}^2$ in the ζ -plane implies that

$$(3.7) \quad \mathfrak{a}_k^1 = [z_v = g_v(\exp(i\varphi)), v=1, 2, \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_{k+1}]$$

where $k=1, 2$ and $\varphi_3 = \varphi_1 + 2\pi$.

3. Since every point of $\mathfrak{a}_k^1$ lies also in a certain lamina, say $\mathfrak{S}_k^2(\lambda_k) = [z_v = h_v(Z_k, \lambda_k), v=1, 2]$ there exist continuous monotonous functions $\lambda_k = \lambda_k^*(\varphi)$ and $Z_k = Z_k^*[\lambda_k^*(\varphi)]$, $\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_{k+1}$ such that

$$(3.8) \quad \mathfrak{a}_k^1 = [z_v = h_v^k(Z_k^*[\lambda_k^*(\varphi)], \lambda_k^*(\varphi)), v=1, 2, \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_{k+1}].$$

⁷⁾ We assume here that $\mathfrak{Q}^2$ intersects only two segments $\overline{\mathfrak{i}_k^3}$, and we make further a number of assumptions which simplify the formulation of the results. Most of these simplifications are unessential, and it is clear how they have to be modified in more general cases.

We assume that $\lambda_k^*(\varphi)$ and $Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi))$ are chosen in such a way that

$$\lambda_k^*(\varphi^{(1)}) \neq \lambda_k^*(\varphi^{(2)}), \quad Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi^{(1)})) \neq Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi^{(2)})) \quad \text{for } \varphi^{(1)} \neq \varphi^{(2)}.$$

THEOREM 3.2. Let f be an analytic function of two complex variables, regular in $\overline{\mathfrak{M}}$. Let the intersection $\overline{\mathfrak{M}}^2 = [z_v = g_v(\zeta), v = 1, 2, |\zeta| \leq 1]$ of $\mathfrak{M}_0^2$ with $\overline{\mathfrak{M}}$ satisfy the hypotheses 1-3. If, in addition, we assume that:

4. The function $f(z_1, z_2)$ omits the values 0 and 1 in the parts

$$\bigcup_{\lambda_k = \lambda_k^*(\varphi_k)}^{\lambda_k^*(\varphi_{k+1})} \mathfrak{S}_k^2(\lambda_k) \text{ of } \mathfrak{I}_k^3, \quad k = 1, 2.$$

5. Along the curves $\mathfrak{I}_k^1 = [z_v = h_v^k(0, \lambda_k), v = 1, 2]$, where $\lambda_k^*(\varphi_k) \leq \lambda_k \leq \lambda_k^*(\varphi_{k+1})$, the functions $f[h_1^k(0, \lambda_k), h_2^k(0, \lambda_k)]$, $k = 1, 2$, assume values belonging to a bounded (closed) domain $\mathfrak{P}_0^2$ that does not include the points (0) and (1).

6. The domain $\mathfrak{P}_0^2$ is such that for the functional $A(\mathfrak{P}_0^2)$ described in Theorem 3.1 and for $|\varphi - \varphi_k| < \alpha$, $k = 1, 2$, the inequality

$$(3.9) \quad \left| \exp \left(\frac{A(\mathfrak{P}_0^2)}{1 - |Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi))|} \right) \right| < C |\varphi - \varphi_k|^{-a}, \quad 0 < a < 1,$$

holds. Here α and C are conveniently chosen positive constants.

Then at every point of $\mathfrak{M}^2$, say at $[z_v^0 = g_v(\zeta_0), v = 1, 2]$ the function f satisfies the inequality

$$(3.10) \quad |f(z_1^0, z_2^0)| \leq \left\{ \exp \left[\frac{A(\mathfrak{P}_0^2)}{1-r} + \frac{2C\alpha^{1-a}}{\pi(1-a)} \right] \right\} \left(\frac{1 + |\zeta_0|}{1 - |\zeta_0|} \right)$$

where r is a conveniently chosen positive constant ($r < 1$).

PROOF. Our proof proceeds in a similar way as in the case of theorem 3.1.

We divide the segment α^1 into two parts⁸⁾: $\sum_{k=1}^2 \mathfrak{S}_k^1$ where

$$(3.11) \quad \mathfrak{S}_k^1 = [z_v = g_v^{(k)}(\exp(i\varphi)), v = 1, 2, \varphi_k - \alpha < \varphi < \varphi_k + \alpha]$$

and the complementary parts of α^1 , which we shall denote by $\mathfrak{b}^1$.

Along $\mathfrak{S}_k^1$, the inequality (3.9) holds. In every lamina $\mathfrak{S}_k^2(\lambda_k)$, $\lambda_k = \lambda_k^*(\varphi)$, $\varphi_k - \alpha \leq \varphi \leq \varphi_k + \alpha$, the function $f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]$ is a function of one complex variable Z_k defined in $|Z_k| \leq 1$ and omits there the values 0 and 1. It satisfies at $Z_k = 0$ the assumption 5., hence by SCHOTTKY's theorem (see [14], p. 198) we have for $\varphi_k - \alpha \leq \varphi < \varphi_k + \alpha$

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f[h_1^k(Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi)), \lambda_k^*(\varphi)), h_2^k(Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi)), \lambda_k^*(\varphi))]| \\ \leq \exp \left[\frac{A(\mathfrak{P}_0^2)}{1 - |Z_k^*(\lambda_k^*(\varphi))|} \right] \leq C |\varphi - \varphi_k|^{-a}. \end{array} \right.$$

Since the remaining part $\mathfrak{b}^1 = \alpha^1 - \sum_{k=1}^2 \mathfrak{S}_k^1$, consists of two arcs, each of which lies completely in $\mathfrak{I}_k^3$ ($k = 1$ or 2), we conclude that for the representation

⁸⁾ Each of these parts is a sum of two disconnected segments.

$Z_k = Z_k^*(\lambda_k)$ of $\mathfrak{b}^1$ in the Z_k -plane there exist⁹⁾ $r = r(\alpha)$, $r < 1$, such that

$$(3.13) \quad |1 - |Z_k^*(\lambda_k)|| \geq 1 - r.$$

Therefore, from assumptions 4. and 5. follows the inequality (3.5) for values of $f(z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \in \mathfrak{b}^1$.

We consider now the function $f(z_1, z_2)$ in the segment $\overline{\mathfrak{A}^2}$, i.e. $f[g_1(\zeta), g_2(\zeta)]$, $|\zeta| \leq 1$. Considered as a function of ζ it is an analytic function regular in $|\zeta| < 1$, continuous in $|\zeta| \leq 1$. For $\zeta = \exp(i\varphi)$ it has the following bounds:

$$(3.14) \quad |f[g_1(\exp(i\varphi)), g_2(\exp(i\varphi))]| \leq \begin{cases} C|\varphi - \varphi_k|^{-a}, & \text{for } |\varphi - \varphi_k| \leq \alpha, \quad k=1, 2 \\ \exp\left[\frac{\Delta(\mathfrak{P}_0^2)}{1-r}\right] & \text{for } |\varphi - \varphi_k| > \alpha. \end{cases}$$

The POISSON formula (see e.g. [10] p. 70) yields for $\zeta_0 \in \mathfrak{A}^2$:

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{aligned} |f(z_1^0, z_2^0)| &= |f[g_1(\zeta_0), g_2(\zeta_0)]| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |f[g_1(\exp(i\varphi)), g_2(\exp(i\varphi))]| \left| \frac{\exp(i\varphi) + \zeta_0}{\exp(i\varphi) - \zeta_0} \right| d\varphi \\ &\leq \left[\exp\left(\frac{\Delta(\mathfrak{P}_0^2)}{1-r}\right) \right] \left[\frac{1 + |\zeta_0|}{1 - |\zeta_0|} \right] + \frac{4C}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\alpha} \frac{1 + |\zeta_0|}{1 - |\zeta_0|} \frac{d\varphi}{\Phi^a} \end{aligned} \right.$$

which yields (3.10).

REMARK. In some instances instead of (3.14) it is convenient to use the inequality

$$(3.16) \quad |f[g_1(\exp(i\varphi)), g_2(\exp(i\varphi))]| \leq [A_0 + 2]^{\frac{\Delta}{1-r}}$$

where Δ is an absolute constant, and

$$(3.17) \quad A_0 = \max |f[h_k^1(0, \lambda_k), h_k^2(0, \lambda_k)]|$$

for $\lambda_k^*(\varphi_k) \leq \lambda_k \leq \lambda_k^*(\varphi_{k+1})$. See [10] p. 224.

REMARK. In the theorems 3.1 and 3.2 bounds for $f(z_1, z_2)$ in *one* segment, $\mathfrak{A}^2$, are given. Using a (two parameter) family $\mathfrak{A}^2(s)$ of surfaces we can cover $\mathfrak{M}$ (or a part of $\mathfrak{M}$) and using theorems 3.1 and 3.2 we obtain bounds for f in $\mathfrak{M}$ (or in a part of $\mathfrak{M}$). Using *some* families of surfaces one obtains immediately various theorems mentioned in the Introduction. In many instances one can investigate how to choose these families to obtain the best results.

§ 3. Bounds for $|f|$ if on every lamina $\mathfrak{Z}_k^2(\lambda_k)$ of $\mathfrak{A}_k^3$, f is a univalent function. It is of considerable interest that various other results on value distribution of functions of *one* complex variable can be used in a similar manner to obtain theorems in the theory of two complex variables. For instance if in every lamina $\mathfrak{Z}_k^2(\lambda_k)$ the function $f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]$ is univalent (schlicht) we obtain the following result.

⁹⁾ For instance we can choose $r = |Z_k^*(\lambda_k)|$.

THEOREM 3.3. Suppose: 1°. The intersection of an analytic surface $\mathfrak{A}_0^2 = [z_\nu = g_\nu(\zeta), \nu = 1, 2]$ with the boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$ is a closed curve $\mathfrak{p}_k^1 = [z_\nu = g_\nu(\exp(i\varphi)), 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$ which lies in the segment¹⁰⁾ $\mathfrak{i}_k^3 = [z_\nu = h_\nu^k(Z_k, \lambda_k)]$.

2°. $\mathfrak{p}_k^1$ lies in a segment which when its representation is normalized with respect to the axis $\mathfrak{l}_k^1 = [z_\nu = h_\nu^k(0, \lambda_k)]$, lies in the circle $|Z_k| \leq R < 1$.

3°. An analytic function $f(z_1, z_2)$, $f[g_1(0), g_2(0)] = a$, is given which is regular in $\mathfrak{M}$ and possesses the property that $f[h_1(Z_k, \lambda_k), h_2(Z_k, \lambda_k)]$ is for every fixed λ_k a univalent function of Z_k in $|Z_k| \leq 1$.

4°. Along the line $\mathfrak{l}_k^1 = [z_\nu = h_\nu^k(0, \lambda_k), \nu = 1, 2]$

$$(3.18) \quad |f[h_1(0, \lambda_k), h_2(0, \lambda_k)]| \leq \alpha, \quad \left| \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_\nu} \right|_{z_\nu = h_\nu^k(0, \lambda_k)} \leq \beta_\nu,$$

$$(3.19) \quad \left| \frac{\partial h_\nu^k(Z_k, \lambda_k)}{\partial Z_k} \right|_{Z_k=0} \leq \gamma_\nu, \quad \nu = 1, 2.$$

Then

$$(3.20) \quad |f[g_1(\zeta), g_2(\zeta)] - a| \leq \left[(\alpha + |a| + \left(\sum_{\nu=1}^2 \beta_\nu \gamma_\nu \right)) R(1-R)^{-2} \right] |\zeta|.$$

PROOF. Since for $|Z_k| < 1$, $f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]$ is univalent according to KOEBE's theorem we have

$$(3.21) \quad \frac{|Z_k|}{(1 + |Z_k|)^2} \leq \left| \frac{f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)] - f[h_1^k(0, \lambda_k), h_2^k(0, \lambda_k)]}{B(0, \lambda_k)} \right| \leq \frac{|Z_k|}{(1 - |Z_k|)^2},$$

$$(3.22) \quad \frac{1 - |Z_k|}{(1 + |Z_k|)^3} \leq \left| \frac{B(Z_k, \lambda_k)}{B(0, \lambda_k)} \right| \leq \frac{1 + |Z_k|}{(1 - |Z_k|)^3},$$

where

$$(3.23) \quad B(Z_k, \lambda_k) \equiv \frac{\partial f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]}{\partial Z_k}.$$

According to our hypotheses the values Z_k of the intersection curve

$$\mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{i}_k^3 = [z_\nu = g_\nu(\exp(i\varphi)) = h_\nu^k(Z_k, \lambda_k), \nu = 1, 2, 0 \leq \lambda_k \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

satisfy $|Z_k| \leq R$. Therefore by (3.21) at every point of $\mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{i}_k^3$ we have

$$(3.24) \quad \begin{cases} |f[g_1(\exp(i\varphi)), g_2(\exp(i\varphi))]| = |f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]| \\ \leq |f[h_1^k(0, \lambda_k), h_2^k(0, \lambda_k)]| + \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_\nu} \frac{\partial h_\nu^k(Z_k, \lambda_k)}{\partial Z_k} \right)_{Z_k=0} \frac{|Z_k|}{(1 - |Z_k|)^2} \\ \leq \alpha + \left(\sum_{\nu=1}^2 \beta_\nu \gamma_\nu \right) R(1-R)^{-2}. \end{cases}$$

Since according to the hypotheses $f[g_1(0), g_2(0)] = a$, the inequality (3.20) follows by SCHWARZ lemma.

THEOREM 3.4. Suppose that the function $f(z_1, z_2)$ and the intersection $\mathfrak{A}^2 = [z_\nu = g_\nu(\zeta), \nu = 1, 2, |\zeta| \leq 1]$ with $\mathfrak{m}^3$ satisfy the conditions 1° and 3° of the theorem 3.3.

¹⁰⁾ Here and in the remaining part of this section we have to assume that the relations indicated in the footnote ⁶⁾ p. 186 hold.

Further, f satisfies 2° , with the inequality $|Z_k| \leq R$ being replaced by

$$(3.25) \quad 1 > R \geq |Z_k| \geq r > 0.$$

Finally we assume

4° . Along the axis $\mathfrak{I}_k^1$ the function $f(z_1, z_2)$ vanishes, i.e.,

$$(3.26) \quad f[h_1^k(0, \lambda_k), h_2^k(0, \lambda_k)] = 0.$$

5° . For the function $B(Z_k, \lambda_k)$, see (3.23), it holds

$$(3.27) \quad |B(0, \lambda_k)| \geq \tau > 0, \quad 0 \leq \lambda_k \leq 2\pi,$$

where τ is a conveniently chosen constant.

6° . $f(z_1, z_2)$ assumes on $\mathfrak{U}^2 = [z_\nu = g_\nu(\zeta), \nu = 1, 2, |\zeta| \leq 1]$ the value a only at the points¹¹⁾ $\zeta_1 = 0, \zeta_2, \dots, \zeta_S, |\zeta_s| < 1, s = 2, 3, \dots, S$.

Then

$$(3.28) \quad |f[g_1(\zeta), g_2(\zeta)] - a| \geq \tau r (1 + R)^{-2} \prod_{s=1}^S \left| \frac{\zeta - \zeta_s}{1 - \bar{\zeta}_s \zeta} \right|.$$

PROOF. Since $|B(0, \lambda_k)| > 0$, using the left hand side of the inequality (3.21) we obtain for the values $(z_1, z_2) \in \mathfrak{U}_0^2 \cap \mathfrak{I}_0^3$

$$(3.29) \quad |f[h_1^k(Z_k, \lambda_k), h_2^k(Z_k, \lambda_k)]| \geq B(0, \lambda_k) |Z_k| (1 + |Z_k|)^{-2} \geq \tau r (1 + R)^{-2}.$$

Since

$$(3.30) \quad \left[\prod_{s=1}^S (\zeta - \zeta_s) / (1 - \bar{\zeta}_s \zeta) \right] [f(g_1(\zeta), g_2(\zeta)) - a]^{-1}$$

is regular in the unit circle $|\zeta| \leq 1$, (3.28) follows.

When formulating the theorem 3.4 we assumed that f vanishes on the axis $\mathfrak{I}_k^1$. It is possible to replace this requirement by a weaker one.

COROLLARY. Suppose that the function $f(z_1, z_2)$ and the intersection of $\mathfrak{U}_0^2$ with $\mathfrak{m}^3$ satisfy the conditions $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ of the theorem 3.4 (see also the theorem 3.3). Further we assume that $\mathfrak{U}_0^2 \cap \mathfrak{I}_k^3$ can be subdivided into finitely many parts,

$$(3.31) \quad \mathfrak{U}_0^2 \cap \mathfrak{I}_k^3 = \sum_{\sigma=1}^K \mathfrak{I}_\sigma^1,$$

$$\mathfrak{I}_\sigma^1 = [z_\nu = h_\nu^k(0, \lambda_k), \lambda_k^\sigma \leq \lambda_k < \lambda_k^{\sigma+1}, \sigma = 1, 2, \dots, K], \quad \lambda_k^{K+1} = \lambda_k^1 + 2\pi,$$

such that

$$(3.32) \quad |f(z_1, z_2)| \leq a_\sigma, \quad |B(0, \lambda_k)| \geq \tau_\sigma \quad \text{on} \quad \mathfrak{I}_\sigma^1$$

[see (3.23)]. Hereby we assume that the curve

$$\mathfrak{U}_0^2 \cap \mathfrak{I}_k^3 \equiv [z_\nu = h_\nu^k(\tilde{Z}_k(\lambda_k), \lambda_k), \nu = 1, 2]$$

and the axis

$$\mathfrak{I}_k^1 = [z_\nu = h_\nu^k(0, \lambda_k), \nu = 1, 2] = [z_\nu = g_\nu(\exp(i\varphi)), \nu = 1, 2],$$

¹¹⁾ Every zero is counted according to its multiplicity.

are located in such a way that

$$(3.33) \quad R_\sigma \geq |\tilde{Z}_k(\lambda_k)| \geq r_\sigma \quad \text{for} \quad \lambda_k^\sigma \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{\sigma+1}, \quad \lambda_k^{K+1} = \lambda_k^1 + 2\pi,$$

and

$$(3.34) \quad a_\sigma < \tau_\sigma r_\sigma (1 + R_\sigma)^{-2}.$$

If, in addition, the condition 6° of the theorem 3.4 is satisfied and

$$g_\nu(\exp(i\varphi_\sigma)) = h_\nu[\tilde{Z}_k(\lambda_k^\sigma), \lambda_k^\sigma], \quad \nu = 1, 2$$

then for $(z_1, z_2) \in \mathfrak{M}_0^2 \cap \mathfrak{M}$ we have

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f(z_1, z_2)| \equiv |f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))| \\ \geq \prod_{s=1}^S \left| \frac{\zeta - \zeta_s}{1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_s} \right| \exp \left[\sum_{\sigma=1}^K \log [\tau_\sigma r_\sigma (1 + R_\sigma)^{-2} - a_\sigma] H(\xi, \eta, \varphi_\sigma, \varphi_{\sigma+1}) \right] \end{array} \right.$$

where H is the harmonic measure¹²⁾ of the arc $(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma+1})$ and $\zeta = \xi + i\eta$.

PROOF. We proceed in the same way as before. Using the left hand side of (3.21) and (3.33) we obtain that for $\lambda_k^\sigma \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{\sigma+1}$, i.e. for $\varphi_\sigma \leq \varphi \leq \varphi_{\sigma+1}$,

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f[g_1(\exp(i\varphi)), g_2(\exp(i\varphi))]| \\ = |f[\lambda_1^k(\tilde{Z}_k(\lambda_k), \lambda_k), h_2(\tilde{Z}_k(\lambda_k), \lambda_k)]| \geq \tau_\sigma r_\sigma (1 + R_\sigma)^{-2} - a_\sigma. \end{array} \right.$$

Therefore for $|\zeta| < 1$ it holds

$$\begin{aligned} \log |f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))| - \log \left(\prod_{s=1}^S \left| \frac{\zeta - \zeta_s}{1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_s} \right| \right) \\ \geq \sum_{\sigma=1}^K \log [\tau_\sigma r_\sigma (1 + R_\sigma)^{-2} - a_\sigma] H(\xi, \eta; \varphi_\sigma, \varphi_{\sigma+1}). \end{aligned}$$

Since in 6° we assumed that in $|\zeta| \leq 1$, $f[g_1(\zeta), g_2(\zeta)]$ vanishes only at the points ζ_s , $s=1, 2, \dots, S$, (3.35) follows.

REMARK. It should be added that the remark on p. 190 refers also to the theorems 3.3 and 3.4.

Bibliography.

[1] BERGMAN, S.: Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Math. Ann. **86**, 237—271 (1922). — [2] BERGMAN, S.: Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche. Jber. dtsh. Math.-Ver. **42**, 238—252 (1932/3). — [3] BERGMAN, S.: Über den Wertvorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Z. **36**, 171—183 (1932). — [4] BERGMAN, S.: Über eine in gewissen Bereichen gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. Math. Z. **39**, 76—94, 605—608 (1934). — [5] BERGMAN, S.: Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Rec. Math. (Mat. Sbornik), N. S. **1** (43), 851—862 (1936). — [6] BERGMAN, S.: Über das Verhalten der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneten Randfläche. Mathematica **14**, 107—123 (1938). — [7] BERGMAN, S.: Sur les fonctions orthogonales de plusieurs

¹²⁾ I.e., that harmonic function of ξ, η , defined in $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ which equals 1 on the arc $(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma+1})$ and vanishes on the remaining part of the boundary of the unit circle.

variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques. Mém. Sci. Math. **106**, 1—63 (1947). — [8] BERGMAN, S.: Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes. Mém. Sci. Math. **108**, 1—80 (1948). — [9] BERGMAN, S.: Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, pp. 135—157. — [10] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2. Leipzig 1931. — [11] BOCHNER, S.: Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. Math. Z. **14**, 180—207 (1922). — [12] BREMERMAN, H.: Analytic continuation of the kernel function and of the invariant metric in several complex variables. Proceedings of the Conference on Complex Variables. Ann. Arbor. Michigan 1954. — [13] DAVIS, P.: On the application of doubly orthogonal functions to a problem of approximation in two regions. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 475—491 (1952). — [14] LITTLEWOOD, J. E.: Lectures on the theory of functions. Oxford: University Press 1944. — [14a] MASCHLER, M.: Minimal domains and the kernel function. To appear in Pacific Journal of Mathematics. — [15] MESCHKOWSKI, H.: Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme. Math. Ann. **127**, 107—129 (1954). — [16] NEHARI, Z.: An integral equation associated with a function-theoretical extremal problem. To appear in J. d'Analyse Mathématique. — [17] SOMMER, F.: Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Ann. **125**, 172—182 (1952). — [18] SZEGÖ, G.: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Z. **9**, 218—270 (1921). — [19] WEIL, A.: L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Ann. **111**, 178—182 (1935). — [20] WEIL, A.: Sur les séries de polynomes de deux variables complexes. C. R. Paris **194**, 1904 to 1905 (1932).

Stanford University, Stanford, Cal. (USA.).

(Eingegangen am 14. März 1955.)

Mapping degree in Banach spaces and spectral theory.

To the memory of I. SCHUR in gratitude.

By

ERICH H. ROTHE.

1. INTRODUCTION. The mapping degree in a real Banach space R was established by Leray and Schauder¹⁾ for mappings of a bounded domain D of R into R which are of the form

$$(1.1) \quad y = f(x) = x - F(x)$$

where $F(x)$ is completely continuous. This was done by assuming Brouwer's theory of the mapping degree in finite dimensional Euclidean spaces as known, and then using an approximation procedure based on the fact that to every $\varepsilon > 0$ there exists a map $S(x)$ of D into a finite dimensional subspace of R such that

$$(1.2) \quad \|F(x) - S(x)\| < \varepsilon.$$

In the present paper an attempt is made to develop the degree theory directly in the Banach space R . Here already the case that (1.1) is a linear map requires some consideration due to the fact that no orientation is defined in a Banach space²⁾. Accordingly, the main part of this paper deals with the linear case. The problem is to assign to a linear non-singular map (1.1) an index $j = j(f)$ which is $+1$ or -1 , is invariant under homotopy, and $+1$ if f is the identity map I . It is natural to consider $x - \mu F(x)$ for $0 \leq \mu \leq 1$, or with $\lambda = \mu^{-1}$

$$(1.3) \quad f_\lambda(x) = (\lambda I - F)(x)$$

and the spectrum $\sigma(F)$ of F . If the part of $\sigma(F)$ with $\Re(\lambda) \geq 1$ ³⁾ contains only a finite number of points and if it is possible to assign to each such point

¹⁾ [6]. The theory was extended to linear convex topological spaces by Leray [5], and Nagumo [9]. (Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.) The present paper is restricted to Banach spaces. As usual the norm of an element x of such a space will be denoted by $\|x\|$.

²⁾ In a finite dimensional space the case of a linear map (1.1) is quite trivial, the degree being $+1$ or -1 according to whether the map (1.1) preserves the orientation or not, i.e., whether the determinant of (1.1) is > 0 or < 0 . However, it seems to be an unsolved problem whether in case of a linear completely continuous Banach space map $F(x)$ the approximation (1.2) can be effected by a linear S . Therefore in order to establish the degree theory for linear maps (1.1) in the Banach space by the approximation method one would (at least at the present state of our knowledge) have to use the degree theory for non linear maps in the finite dimensional space.

³⁾ $\Re(\lambda)$ denotes the real part of the complex number λ .

a positive integer m_i such that

$$(1.4) \quad j = \sum_i (-1)^{m_i}$$

is invariant under homotopy⁴), then (1.4) will represent a suitable definition for the index j ⁵). This program is carried through in section 2. In this setup the homotopy theorem becomes a theorem on spectral perturbation, and, in order to use fully the spectral perturbation theory, we deal in that section with linear maps of a complex Banach space X into itself. In section 3 the special situation is treated where X admits a "conjugation" and where, consequently, it is possible to define "real" maps. Certain simplification in the basic assumptions of section 2 and in the definition (2.4) of the index can be made in this case. Section 4 deals with homotopy properties of real linear maps of such a space X into itself. Section 5 treats the non linear case in an arbitrary complex Banach space X , but only "smooth" mappings (def. 5.1) are considered while the treatment of mappings with less restrictive assumptions is left to further investigation. The results of section 5 for complex spaces are in section 6 carried over to real Banach spaces R by imbedding them (def. 6.1) in a complex Banach space.

2. THE INDEX OF A LINEAR MAP IN A COMPLEX BANACH SPACE X . Let X be a complex Banach space and F a bounded linear map of X into itself which satisfies the following assumptions A, B, and C:

ASSUMPTION A. No point of $\Re(\lambda) = 1$ belongs to the spectrum $\sigma(F)$ of F .

ASSUMPTION B. The intersection of $\sigma(F)$ with $\Re(\lambda) > 1$ consists of isolated points.

Before formulating Assumption C we remark first that B together with the boundedness of F implies that the intersection $\sigma(F) \cap \{\Re(\lambda) > 1\}$ consists of a finite number of points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, or is empty. Then, for $i = 1, 2, \dots, r$, let c_i be the circumference of a counter-clockwise oriented circle with center λ_i and such that λ_i is the only point of $\sigma(F)$ inside or on c_i . Let E_{λ_i} be the projection⁶) defined by

$$(2.1) \quad E_{\lambda_i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_i} R_\mu(F) d\mu$$

where

$$(2.2) \quad R_\mu(F) = (\mu I - F)^{-1}.$$

Finally, let

$$(2.3) \quad X_{\lambda_i} = E_{\lambda_i} X$$

be the range of E_{λ_i} .

⁴) It will be seen that these two properties are certainly true if F is completely continuous.

⁵) For the Leray-Schauder index the validity of (1.4) is a theorem (cf. [6] p. 58) while it will be a definition in the present paper.

⁶) [1], p. 196.

ASSUMPTION C. The dimension of X_{λ_i} is a finite number m_i 7).

DEFINITION 2.1. The index $j=j(f)$ of the mapping (1.1) is defined by

$$(2.4) \quad j=j(f) = (-1)^{\sum_{i=1}^r m_i}.$$

The object of the present section is the proof of the following two theorems:

THEOREM 2.1. Let $F_0(x)$ satisfy the assumptions A, B, and C and let

$$(2.5) \quad f_0(x) = x - F_0(x).$$

Then there exists an $\varepsilon > 0$ of the following property: if the linear bounded map (1.1) satisfies

$$(2.6) \quad \|f - f_0\| = \|F - F_0\| < \varepsilon$$

then F satisfies the same assumptions as F_0 and

$$(2.7) \quad j(f) = j(f_0).$$

THEOREM 2.2. For $0 \leq t \leq 1$ let $f_t(x) = x - F_t(x)$ where $F_t(x)$ satisfies assumptions A, B, and C, and where in addition F_t is continuous in t 8). Then $j(f_1) = j(f_0)$.

Theorem 2.2 is an immediate consequence of theorem 2.1 as application of the Heine-Borel theorem to the interval $0 \leq t \leq 1$ shows. The proof of theorem 2.1 is based on the following lemmas 2.1 and 2.2.

LEMMA 2.1. Let F_0 satisfy the assumptions of theorem 2.1. We denote by $\sigma^+(F_0)$ and $\sigma^-(F_0)$ those parts of the spectrum $\sigma(F_0)$ of F_0 which lie in $\Re(\lambda) > 1$ and $\Re(\lambda) < 1$ respectively such that (by assumption A) $\sigma(F_0) = \sigma^+(F_0) + \sigma^-(F_0)$. Let O^- be an open set in $\Re(\lambda) < 1$ containing $\sigma^-(F_0)$ 9), and let, for $i=1, 2, \dots, r_0$, c_i be counter-clockwise oriented circles defined as follows: by assumption B, $\sigma^+(F_0)$ consists of a finite number of points $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{r_0}^0$. c_i is then a circle with center λ_i^0 which lies in $\Re(\lambda) > 1$ and such that the closed disk bounded by c_i contains no other point of $\sigma(F_0)$. Then there exists a positive ε_0 such that for

$$(2.8) \quad \|F - F_0\| < \varepsilon_0$$

the spectrum $\sigma(F)$ of F is contained in the open set O which is the union of O^- and the open disks bounded by the c_i .

PROOF. Since O is an open set containing $\sigma(F_0)$ the lemma follows from the well-known fact that the spectrum $\sigma(F)$ of F depends continuously on F^{10} .

LEMMA 2.2. If F_0 is bounded linear and λ_i an isolated point of $\sigma(F_0)$ then there exists a positive ε_i such that for all linear bounded F satisfying

$$(2.9) \quad \|F - F_0\| < \varepsilon_i$$

7) Assumptions A, B, and C are automatically satisfied if $F(x)$ is completely continuous. See, e.g., [1] p. 207.

8) I.e., for each t_0 in $0 \leq t \leq 1$ there exists to each $\eta > 0$ a ζ such that $\|F_t - F_{t_0}\| < \eta$ or what is the same $\|F_t(x) - F_{t_0}(x)\| < \|\eta\| \eta$ for $|t - t_0| < \zeta$.

9) Such set O^- exists since $\sigma^-(F_0)$ is closed.

10) For definition and proof of the continuity of $\sigma(F)$, see [4] p. 118.

the following is true: if $m_i(F)$ denotes the dimension of the range of the projection

$$(2.10) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_i} R_\mu(F) d\mu$$

and if $m_i(F_0)$ is finite then $m_i(F)$ is finite and

$$(2.11) \quad m_i(F) = m_i(F_0).$$

We postpone the proof and show first that lemmas 2.1 and 2.2 together imply theorem 1. Using the notations used in the formulation of the two lemmas, we choose

$$(2.12) \quad \varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$$

and will show that with this choice of ε , theorem 2.1 is true. That F satisfies assumption A is obvious from lemma 2.1. To prove assumption B we note first that lemma 2.1 also implies that the part of $\sigma(F)$ with $\Re(\lambda) > 1$ is contained in the open disks o_i bounded by the circles c_i . Since there are only a finite number of these disks it will be sufficient to prove that for fixed i the intersection $\sigma_i = o_i \cap \sigma(F)$ is finite. Now by the assumption made on F_0 , $m_i(F_0)$ is finite (Assumption C). Therefore, by lemma 2.2, $m_i(F)$ is also finite; i.e., the range X_i of the projection (2.10) is a finite dimensional space. Now σ_i is a spectral set of $F^{(1)}$. Therefore, by a theorem of Dunford¹²⁾ σ_i is identical with the spectrum of the restriction F_{X_i} of F to the finite dimensional space X_i and therefore certainly finite. Thus assumption B is proved, and assumption C follows now easily: denote by $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{i_n}^i$ the points of the set σ_i which just has been proved to be finite. Let o_j^i be disjoint circular disks with centers λ_j^i and lying in o_i . Let c_j^i be the counter-clockwise oriented boundary of o_j^i . Then

$$(2.13) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_i} R_\mu(F) d\mu = \sum_{j=1}^{i_n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_j^i} R_\mu(F) d\mu.$$

Therefore, X_i is the direct sum of the ranges X_j^i of the projections which are the terms of the right hand sum in (2.13) and

$$(2.14) \quad m_i(F) = \sum_{j=1}^{i_n} m_j^i(F)$$

if $m_j^i(F)$ denotes the dimension of X_j^i . Since $m_i(F)$ has already been proved to be finite, (2.14) implies that each $m_j^i(F)$ is finite which is assumption C. At the same time (2.7) follows now from (2.14), (2.11), and definition 2.1.

It remains to prove lemma 2.2. This lemma will be a consequence of four further lemmas.

¹¹⁾ A spectral set of F is a subset of $\sigma(F)$ which is open and closed in $\sigma(F)$. Cf. [1] p. 196.

¹²⁾ [1] p. 197.

LEMMA 2.3. Let B_0 be a linear bounded operator on X whose bounded inverse B_0^{-1} exists. Let B be a bounded linear operator which satisfies the inequality

$$(2.15) \quad \|B - B_0\| < \frac{1}{2} \|B_0^{-1}\|^{-1}.$$

Then B^{-1} exists and satisfies the inequality

$$(2.16) \quad \|B^{-1} - B_0^{-1}\| < 2 \|B_0^{-1}\|^2 \|B - B_0\|.$$

PROOF. The fact that (2.15) implies the existence of B^{-1} and the inequality

$$(2.17) \quad \|B^{-1} - B_0^{-1}\| < \frac{\|B_0^{-1}\|^2 \|B - B_0\|}{1 - \|B - B_0\| \|B_0^{-1}\|}$$

is well known¹³). But (2.17) together with (2.15) obviously implies (2.16).

LEMMA 2.4. Let A_0 be a linear bounded operator on X . Let C be a closed bounded subset of the resolvent set $\varrho(A_0)$ of A_0 . Then the resolvent $R_\lambda(A)$ of A is continuous at $A = A_0$ for $\lambda \in C$, and the continuity is uniform as λ varies over C .

PROOF. As is well known for each $x \in X$, $R_\lambda(A_0)(x)$, and therefore also $\|R_\lambda(A_0)(x)\|$, is continuous for $\lambda \in \varrho(A_0)$. Consequently, the latter real valued function of λ reaches a maximum in the closed bounded set C and we have for suitable positive M_x the inequality

$$(2.16) \quad \|R_\lambda(A_0)(x)\| < M_x \quad \text{for } \lambda \text{ in } C \text{ and all } x \in X.$$

By a well-known theorem¹⁴) (2.16) implies the existence of a constant M such that

$$(2.17) \quad \|R_\lambda(A_0)\| < M \quad \text{for } \lambda \in C.$$

Let now A be such that

$$(2.18) \quad \|A - A_0\| < \frac{1}{2M}.$$

We have then by (2.18) and (2.17)

$$\|(\lambda I - A_0) - (\lambda I - A)\| = \|A - A_0\| < \frac{1}{2M} < \frac{1}{2\|R_\lambda(A_0)\|} = \frac{1}{2\|(\lambda I - A_0)^{-1}\|}.$$

From this inequality we conclude by applying lemma 2.3 with $B_0 = \lambda I - A$ $B = \lambda I - A_0$ that $R_\lambda(A) = B^{-1}$ exists and satisfies the inequality

$$\|R_\lambda(A) - R_\lambda(A_0)\| < 2 \|R_\lambda(A_0)\|^2 \|B - B_0\| = 2 \|R_\lambda(A_0)\|^2 \|A - A_0\|$$

which because of (2.17) proves the lemma.

LEMMA 2.5. Let c be a rectifiable curve in the resolvent set of A_0 . Then

$$\int_c R_\mu(A) d\mu$$

is continuous at $A = A_0$.

¹³) [4] p. 92.

¹⁴) See, e.g., [4] p. 26, Theorem 2.12.2.

PROOF. The lemma is an immediate consequence of the preceding lemma.

LEMMA 2.6¹⁵). Let E_0 be a projection whose range has the finite dimension m_0 , and let E be a projection for which

$$(2.19) \quad \|E - E_0\| < \frac{1}{2\|E_0\|}.$$

Then the range of E has a finite dimension m and $m = m_0$.

PROOF OF LEMMA 2.2. Let E_0 be the projection obtained from (2.10) by replacing F by F_0 . By lemma 2.5 we can choose an ε_i such that for F satisfying (2.9) the inequality (2.19) holds with E being the projection (2.10), and the equality (2.11) to be proved follows now from lemma 2.6.

3. REAL TRANSFORMATIONS IN A COMPLEX BANACH SPACE. In this section we consider "real" transformations in certain complex Banach spaces (definition 3.3)¹⁶. It turns out that for such transformations in the definition (2.4) of the index only those m_i have to be considered which correspond to real points of the spectrum (Theorem 3.1). In addition, some simplifications in assumptions A, B, and C of section 2 are possible (Theorem 3.2).

DEFINITION 3.1. Let X be a complex Banach space with elements $x, y, \dots$. A map $x \rightarrow \bar{x}$ of X onto itself is called a conjugation if it satisfies the following four properties:

$$(3.1) \quad \bar{\bar{x}} = x$$

$$(3.2) \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$(3.3) \quad \|x\| = \|\bar{x}\|$$

$$(3.4) \quad \overline{\lambda x} = \bar{\lambda} \bar{x}$$

where $\bar{\lambda}$ is the conjugate complex number to the complex number λ .

DEFINITION 3.2. Let $x \rightarrow \bar{x}$ be a conjugation in X . The elements x for which $x = \bar{x}$ are called real (with respect to the given conjugation).

LEMMA 3.1. Let $x \rightarrow \bar{x}$ be a conjugation in X . Then the real elements of X (with their original norms) form a Banach space R over the reals.

The proof consists in a rather obvious verification. We omit the details.

LEMMA 3.2. Let $x \rightarrow \bar{x}$ be a conjugation in X , and let R be the real Banach space of the preceding lemma. Then every element x of X can be written uniquely as

$$(3.5) \quad x = x' + i x''$$

where x' and x'' are elements of R and $i = \sqrt{-1}$.

PROOF. It is easily seen that $x' = (x + \bar{x})/2$, $x'' = (x - \bar{x})/2i$ is the unique couple satisfying the requirements.

DEFINITION 3.3. Let X and R have the same meaning as in lemma 3.1. Then a continuous linear map A of X into itself or into another space with a conjugation is called real if

$$(3.6) \quad A(\bar{x}) = \overline{A(x)}.$$

¹⁵) For this lemma and its proof, see [10] p. 424, Lemma 4.

¹⁶) Cf. the similar definitions for the Hilbert space case given in [11], chapter IX, § 2.

LEMMA 3.3. *The continuous linear map A of X into itself is real if and only if it leaves R invariant.*

We omit the obvious proof.

LEMMA 3.4. *If A is real then (i) the spectrum $\sigma(A)$ of A is symmetric with respect to the real axis of the complex λ -plane and (ii)*

$$(3.7) \quad R_{\bar{\lambda}}(A)(x) = \overline{R_{\lambda}(A)(\bar{x})}.$$

PROOF. Since $\sigma(A)$ and the resolvent set $\varrho(A)$ of A are disjoint sets whose union is the whole λ -plane it will for the proof of i) be sufficient to show that $\varrho(A)$ is symmetric with respect to the real axis. Let then $\lambda_0 \in \varrho(A)$; we have to prove that $\bar{\lambda}_0 \in \varrho(A)$. By definition of the resolvent we have

$$(3.8) \quad (\lambda_0 I - A) R_{\lambda_0}(A)(x) = x \quad \text{for all } x \in X.$$

Since A is real it follows from lemma 3.3 that for all $y \in X$

$$(\bar{\lambda}_0 I - A)(\bar{y}) = \overline{(\lambda_0 I - A)(y)}$$

and therefore from (3.8)

$$(\bar{\lambda}_0 I - A) \overline{R_{\lambda_0}(A)(x)} = \overline{(\lambda_0 I - A) R_{\lambda_0}(A)(x)} = \bar{x},$$

or replacing x by $\bar{x}$

$$(3.9) \quad (\bar{\lambda}_0 I - A) \overline{R_{\lambda_0}(A)(\bar{x})} = x.$$

We set now

$$(3.10) \quad S(x) = \overline{R_{\lambda_0}(A)(\bar{x})}.$$

$S(x)$ is bounded and as (3.9) shows a right inverse of $\bar{\lambda}_0 I - A$. Interchanging the two factors of the left member of (3.8) we would have seen that $S(x)$ is also a bounded left inverse. Thus $\bar{\lambda}_0 I - A$ has a uniquely determined bounded inverse which shows that $\bar{\lambda}_0$ is in $\varrho(A)$ and thus proves i). Moreover, since $S(x)$ is the bounded inverse of $\bar{\lambda}_0 I - A$ we see from the definition of the resolvent that $S(x) = R_{\bar{\lambda}_0}(A)(x)$. Comparison with (3.10) proves (3.7).

LEMMA 3.5. *Let A be real and λ_0 an isolated point of the spectrum $\sigma(A)$ of A such that by the preceding lemma $\bar{\lambda}_0$ is also an isolated point of $\sigma(A)$. Let c_0 be a counter-clockwise oriented circle with center λ_0 and such that the closed disk bounded by c_0 contains no other point of $\sigma(A)$ but λ_0 , and let c'_0 be the counter-clockwise oriented circle with center $\bar{\lambda}_0$ and of the same radius as c_0 . Finally, let $X_{\lambda_0}, X_{\bar{\lambda}_0}$ denote the ranges of the projections*

$$(3.11) \quad E_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_0} R_{\mu}(A) d\mu, \quad E_{\bar{\lambda}_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c'_0} R_{\mu}(A) d\mu$$

respectively. We then claim:

- i) if λ_0 is not real then X_{λ_0} and $X_{\bar{\lambda}_0}$ are conjugate to each other (i.e., if y varies over X_{λ_0} then $\bar{y}$ varies over $X_{\bar{\lambda}_0}$), and, consequently, they are of the same dimension;
- ii) if λ_0 is real then X_{λ_0} is invariant under conjugation.

PROOF. Since $\bar{x}$ varies over all of X as x does, X_{λ_0} may be characterized as the set of all $E_{\lambda_0}(\bar{x})$ as x varies over X , and since $X_{\bar{\lambda}_0}$ is the set of all $E_{\bar{\lambda}_0}(x)$ as x varies over X , it is clear that for the proof of i) it is sufficient to prove

$$(3.12) \quad E_{\bar{\lambda}_0}(x) = \overline{E_{\lambda_0}(\bar{x})}.$$

But (3.12) implies also ii), for in the case of a real λ_0 it reads $\overline{E_{\lambda_0}(\bar{x})} = E_{\lambda_0}(x)$. Thus it remains to prove (3.12): let r be the common radius of c_0 and c'_0 . We set $\mu = \bar{\lambda}_0 + r e^{i\varphi}$, $\lambda = \lambda_0 + r e^{-i\varphi}$ such that $\mu = \bar{\lambda}$. We then have from (3.11) and (3.7)

$$\begin{aligned} E_{\bar{\lambda}_0}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_\mu(A)(x) r e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{\bar{\lambda}}(A)(x) r e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{R_\lambda(A)(\bar{x}) r e^{-i\varphi} d\varphi} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} R_\lambda(A)(\bar{x}) (-i r e^{-i\varphi} d\varphi) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-c_0} R_\lambda(A)(\bar{x}) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} R_\lambda(A)(\bar{x}) d\lambda = E_{\lambda_0}(\bar{x}). \end{aligned}$$

LEMMA 3.6. Let F satisfy the assumptions A, B, and C of section 2 and, in addition, be real. Let C be a simply closed rectifiable curve which is oriented in the counter-clockwise sense, lies in the half plane $\Re(\lambda) > 1$, and encloses in its interior the part of $\sigma(F)$ which lies in $\Re(\lambda) > 1$. Then the range of the projection

$$(3.13) \quad E = \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\mu(F) d\mu$$

is of finite dimension and invariant under conjugation.

PROOF. Let σ_C be the part of the spectrum $\sigma(F)$ which is enclosed by C . σ_C consists of a finite number of points. Now $\mu \in \sigma_C$ implies $\bar{\mu} \in \sigma_C$ by lemma 3.4. Therefore the points of σ_C can be written as $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_r, \bar{\mu}_r, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ where the μ 's are the different non real points of σ_C and the λ 's the different real points of σ_C . If then the projections $E_{\mu_j}, E_{\bar{\mu}_j}, E_{\lambda_j}$ are defined as in (2.1) we have

$$(3.14) \quad E = \sum_{j=1}^r (E_{\mu_j} + E_{\bar{\mu}_j}) + \sum_{j=1}^p E_{\lambda_j}.$$

It now follows from assumption C (section 2) that the range of E is of finite dimension and the invariance of this range is [because of (3.14)] a consequence of lemma 3.5.

THEOREM 3.1. Let $f = I - F$ where F satisfies the assumptions of lemma 3.6. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ be the real eigenvalues > 1 of F . Let E_{λ_i} be the projection (2.1), and m_i the dimension of its range. Then the index $j(f)$ of f is given by

$$(3.15) \quad j(f) = (-1)^{\sum_{i=1}^p m_i}.$$

PROOF. As in the proof of lemma 3.6 let $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_r, \bar{\mu}_r$ be the distinct non real eigenvalues of F with real part > 1 , and $E_{\mu_i}, E_{\bar{\mu}_i}$ the corresponding projections. Let m'_i, m''_i be the dimensions of the ranges of these projections. Then by definition (2.4)

$$(3.16) \quad j(f) = (-1)^s$$

where

$$s = \sum_{i=1}^r (m'_i + m''_i) + \sum_{i=1}^p m_i.$$

But by lemma 3.5, $m'_i = m''_i$. Therefore

$$s \equiv \sum_{i=1}^p m_i \pmod{2},$$

and (3.15) follows from (3.16).

We will now show that for real transformations the set of assumptions A, B, C may be replaced by the following less restrictive set of assumptions:

Assumption A'. (1.1) is not singular [i.e., $\lambda = 1$ does not belong to $\sigma(F)$].

Assumption B'. $\sigma(F)$ is discrete for $\Re(\lambda) \geq 1$.

Assumption C' is the same as C except that the eigenvalues in question may have a real part $= 1$ ¹⁷).

THEOREM 3.2. *Theorems 3.1, 2.1, and 2.2 are still true if assumptions A, B, C are replaced by A', B', C' provided F is real.*

PROOF. Inspection of the proof of theorem 3.1 and the lemmas leading up to it shows that these proofs with obvious modifications still hold under the new assumptions if the curve C of lemma 3.6 is replaced by a simply closed rectifiable curve which encloses the part of $\sigma(F)$ with $\Re(\lambda) \geq 1$ and separates it from the part of $\sigma(F)$ with $\Re(\lambda) < 1$. It remains to prove theorem 2.4 since this theorem implies theorem 2.2. Let $f_0 = x - F_0$ where F_0 satisfies the assumptions of our theorem 3.2. If $\Re(\lambda) = 1$ contains no point of $\sigma(F_0)$ no new proof is required. Otherwise, $\sigma(F_0)$ contains a finite number of points on $\Re(\lambda) = 1$ which we denote by $v_1, v_2, \dots, v_q$. As in the proof of lemma 3.5 let $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_r, \bar{\mu}_r$ be the distinct complex, and $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ the distinct real eigenvalues of F with $\Re(\lambda) > 1$ while $\sigma^-(F_0)$ denotes the set $\sigma(F_0) \cap \{\Re(\lambda) < 1\}$. Let then c_i, c'_i, c''_i, c'''_i be circles with centers $\lambda_i, \mu_i, \bar{\mu}_i, v_i$ resp. of the following property: if o_i, o'_i, o''_i, o'''_i are the open disks bounded by these circles then the closures of these disks are disjoint; for each of these closures its center is the only point belonging to $\sigma(F_0)$, and those of these closures whose centers are not on the real axis don't intersect the real axis. Let then 0^- be an open set in $\Re(\lambda) < 1$ containing $\sigma^-(F_0)$ and 0 be the union of 0^- and all the open disks defined above. Then there exists an ε such that

$$(3.17) \quad \|F - F_0\| < \varepsilon$$

implies

$$(3.18) \quad \sigma(F) \subset 0^{18}.$$

¹⁷) However (because of assumption A') $\lambda = 1$ cannot be an eigenvalue.

¹⁸) Cf. footnote ¹⁰).

By lemma 2.2 it is possible to choose ε in such a way that in addition to (3.18) the equality (2.14) holds with the $m_i(F)$ denoting the dimensions of the ranges of the projections (2.10) where the c_i are the above circles with the real centers λ_i . Now by the choice of ε the intersection $\sigma(F) \cap \{\Re(\lambda) \geq 1\}$ is contained in the disks o_i, o'_i, o''_i, o'''_i , and since by construction only the o_i intersect the real axis, the real points of $\sigma(F) \cap \{\Re(\lambda) \geq 1\}$ are contained in the o_i . Since F is real the points of $\sigma(F) \cap \{\Re(\lambda) \geq 1\}$ contained in o_i may be written $\lambda_1^i, \dots, \lambda_{p_i}^i, \mu_1^i, \overline{\mu_1^i}, \dots, \mu_{r_i}^i, \overline{\mu_{r_i}^i}$ where the λ 's are real and the μ 's non real. To each of these points corresponds in the usual way a projection and we denote the dimensions of the ranges of these projections by $m_j^i(F)$, $n_j^i(F)$, $\bar{n}_j^i(F)$. Then an argument similar to the one leading to (2.14) shows that

$$(3.19) \quad m_i(F) = \sum_{j=1}^{p_i} m_j^i(F) + \sum_{j=1}^{r_i} (n_j^i(F) + \bar{n}_j^i(F)).$$

But $n_j^i(F) = \bar{n}_j^i(F)$ since F is real. Therefore we see from (3.19) and (2.11) that

$$m_i(F_0) \equiv \sum_{j=1}^{p_i} m_j^i(F) \pmod{2}.$$

By theorem 3.1 this equality implies (2.7).

REMARK 3.1. If $f(x) = x - F(x)$ is linear, non singular, real, and $F(x)$ completely continuous, then the assumptions A', B', C' follow. For the restriction of f to R (cf. lemma 3.4) an index $j_1(f)$ can then be defined by Leray-Schauder's method (cf. [6], section 11). It is easily seen that $j_1(f) = j(f)$ if one observes that the "degree m_i in the sense of Goursat" used in [6] is identical with the number m_i introduced in Assumption C of the present paper, and if one uses the "Conclusion" in [6], p. 58.

4. HOMOTOPY PROPERTIES. THE PRODUCT THEOREM.

DEFINITION 4.1. Let F, G be bounded linear real transformations mapping the complex Banach space X into itself and satisfying the assumptions A', B', C' of section 3. F and G are called homotopic if for each t in the interval $0 \leq t \leq 1$ there exists an F_t which satisfies all assumptions just mentioned for F and G , which is moreover continuous in t and such that $F_0 = F$, $F_1 = G$. The maps

$$(4.1) \quad f(x) = x - F(x), \quad g(x) = x - G(x)$$

are called homotopic if F and G are homotopic.

THEOREM 4.1. Let the linear bounded maps F and G be real and satisfy the assumptions A', B', C'. Then the maps (4.1) are homotopic if and only if $j(f) = j(g)$. In particular: $j(f) = +1$ if and only if f is homotopic to the identity map, and $j(f) = -1$ if and only if f is homotopic to a map $g(x)$ of the form $g(x) = x - 2\varphi(x)x^0$ where x^0 is an arbitrarily chosen real element of X of norm 1, and $\varphi(x)$ an arbitrary linear real functional with $\varphi(x^0) = 1$.

PROOF. That $j(f) = +1$ if f is homotopic to the identity, and $j(f) = -1$ if $f = g$ is a consequence of theorem 3.1 since the index of the identity map is $+1$, and $j(g)$ is easily seen to be -1 . Before proceeding to prove the converse we need a few simple facts which we state as lemmas.

LEMMA 4.1. *Let X^0 be a finite dimensional subspace of X , $\tilde{F}^0$ a real linear map of X^0 into itself and I^0 the identity map of X^0 . The eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ of $\tilde{F}^0$ are supposed to be all real and > 1 . Then $f^0 = I^0 - \tilde{F}^0$ is homotopic to $-I^0$.*

PROOF. We choose the coordinate system in X^0 in such a way that the matrix M representing $\tilde{F}_0$ in this coordinate system is in the Jordan normal form, i.e., that M is direct sum of matrices each of which contains one of the λ_i in the main diagonal and (unless it is one dimensional) contains one's directly above the main diagonal while all its other elements are zero. We define for $0 \leq t \leq 1$ as M_t the matrix obtained from M by replacing each λ_i by $\lambda_i(1-t) + 2t$ and the one's by $1-t$, and by $\tilde{F}_t^0$ the transformation given by M_t . Then $f_1^0 = I^0 - \tilde{F}_1^0$ has the matrix $I^0 - 2I^0 = -I^0$ and is homotopic to $f^0 = I^0 - \tilde{F}_0^0$.

LEMMA 4.2. *With the notations and assumptions of lemma 4.1 let N be the dimension of X^0 . Then: i) if N is even, f^0 is homotopic to the identity I^0 ; ii) if N is odd, $\tilde{f}^0$ is homotopic to a map of the form $g(x) = x - 2\varphi(x)x^0$ where x^0 is an arbitrarily chosen element of X^0 of norm 1 and $\varphi(x)$ a linear functional with $\varphi(x^0) = 1$; iii) if X^0 is invariant under conjugation then x^0 and $\varphi(x)$ may be chosen to be real.*

PROOF. On account of lemma 4.1 we may assume that $\tilde{f}^0 = -I^0$. Now it is well known that in a space of even dimension the negative identity map is homotopic to the identity map. Applying this fact to X^0 proves i), and applying it to the even dimensional space which together with x^0 spans X^0 proves obviously ii). Under the assumption made in iii), x^0 obviously can be chosen real¹⁹). We define $\varphi(x)$ first for $x = \alpha x^0$ by setting $\varphi(x) = \alpha$. Since x^0 is real $\varphi(x)$ is real. By the following lemma 4.3 we can extend $\varphi(x)$ to X as a real linear functional.

LEMMA 4.3. *Let X be a complex Banach space with a conjugation and X_1 a finite dimensional linear subspace which is invariant under this conjugation, and $l(x)$ a linear functional defined on X_1 which is real in the sense of definition 3.3. Then $l(x)$ can be extended to X with the original bound L as a real linear functional.*

PROOF. Let R be the real Banach space consisting of the real elements of X (cf. lemma 3.1). It is then easily seen that the intersection $R_1 = R \cap X_1$ is a finite dimensional linear subspace of R . Therefore we can by the Hahn-Banach theorem for real Banach spaces extend $l(x)$ as a real valued linear functional to R with the original bound L . Let now x be an arbitrary element

¹⁹) Let $x \neq 0$ be an element of X^0 . If then in the decomposition (3.5) $x' \neq 0$ we set $x^0 = (x + \bar{x})/\|x + \bar{x}\|$. If $x' = 0$ we replace x by ix .

of X . By lemma 3.2 we can write uniquely

$$x = x' + i x'' \quad (x', x'' \in R).$$

We then define

$$l(x) = l(x') + i l(x'').$$

It is a matter of simple computation to verify first the additivity of $l(x)$ and then the equality $l(\alpha x) = \alpha l(x)$ for arbitrary complex α . To prove the boundedness of $l(x)$ with the same bound L , let

$$l(x) = |l(x)| e^{-i\theta}, \quad y = x e^{i\theta} = y' + i y'' \quad \text{with } y', y'' \in R.$$

Then

$$|l(x)| = l(x e^{i\theta}) = l(y) = l(y') + i l(y'').$$

Since $l(y')$, $l(y'')$ are real numbers and $y' \in R$, this implies

$$|l(x)| = l(y') \leq L \|y'\| = L \|y + i y''\| \leq L \sqrt{\|y\|^2 + \|y''\|^2} = L \|y\| = L \|x\|.$$

Finally, it is immediately verified that $l(x)$ is real, i.e., satisfies $l(\bar{x}) = \overline{l(x)}$.

LEMMA 4.4. Let X be the direct sum of the subspaces X^0 and X^1 , and E^0 and E^1 the projections of X onto X^0 and X^1 resp. Let G^i be a bounded linear map of X^i into itself ($i=0, 1$). Define for $x \in X$ the map $G(x) = G^0 E^0(x) + G^1 E^1(x)$. Then $\sigma(G)$ is the union of $\sigma(G^0)$ and $\sigma(G^1)$.

PROOF. Since for any bounded transformation T the spectrum $\sigma(T)$ and the resolvent set $\varrho(T)$ are complementary sets (with respect to the whole λ -plane) the statement of the lemma is equivalent to the equality

$$\varrho(G) = \varrho(G^0) \cap \varrho(G^1).$$

But this equality is easily derived from the fact the equation $\lambda x - G(x) = y$ is equivalent to the pair of equations for $x^0 = E^0 x$ and $x^1 = E^1(x)$

$$\lambda x^0 - G^0(x^0) = E^0(y), \quad \lambda x^1 - G^1(x^1) = E^1(y)$$

together with the theorem²⁰) that an everywhere defined inverse of an everywhere defined bounded linear transformation is itself bounded.

We now return to the proof of theorem 4.1. Let Γ^0 and Γ^1 be two simply closed rectifiable and disjoint curves oriented in the counter clockwise sense of the following properties: i) they lie in the resolvent set $\varrho(F)$ of F ; ii) the open domains D^0 and D^1 bounded by them are disjoint; iii) let σ^0 be the part of $\sigma(F)$ which is real and >1 ; then there exists an interval of the real axis which contains the point $\lambda=2$ and σ^0 , and which itself is contained in D^0 ; iv) $\sigma^1 = \sigma(F) - \sigma^0$ lies in D^1 . We set

$$(4.2) \quad F^0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma^0} \mu R_\mu(F) d\mu, \quad F^1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma^1} \mu R_\mu(F) d\mu$$

$$(4.3) \quad E^0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma^0} R_\mu(F) d\mu, \quad E^1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma^1} R_\mu(F) d\mu$$

$$(4.4) \quad X^0 = E^0 X, \quad X^1 = E^1 X.$$

²⁰) See e.g. [4], p. 29, Corollary.

Then, as well known²¹⁾, F^0 leaves X^0 , F^1 leaves X^1 invariant, the restriction $\tilde{F}^0$ of F^0 to X^0 has σ^0 as its spectrum, and X is the direct sum of X^0 and X^1 . σ^0 consists by assumption of a finite number of points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. If m_i is the dimension of the range of the projection (2.1) and N the dimension of X^0 comparison of (2.1) with (4.3) and (4.4) shows that $N = \sum_{i=1}^n m_i$. Consequently, we see from theorems 3.1, 3.2 that

$$(4.5) \quad j(f) = (-1)^N.$$

Now X^0 is invariant under conjugation by lemma 3.6 and $\tilde{F}^0$ satisfies the assumptions of lemma 4.2²²⁾. Therefore there exists for $0 \leq t \leq 1$ a map $\tilde{F}_t^0$ of X^0 into itself (satisfying A' , B' , C') such that $\tilde{F}_0^0 = \tilde{F}^0$ while

$$(4.6) \quad \tilde{f}_1^0(x) = x - \tilde{F}_1^0(x) = \begin{cases} x & \text{if } N \text{ is even} \\ x - 2\varphi(x)x^0 & \text{if } N \text{ is odd} \end{cases}$$

where x^0 , φ are as in lemma 4.2. Let now $\tilde{F}^1$ be the map F^1 [defined in (4.2)] restricted to X^1 , and $\tilde{F}_t^1 = (1-t)\tilde{F}^1$ for $0 \leq t \leq 1$. The spectrum $\sigma(\tilde{F}_t^1)$ of $\tilde{F}_t^1$ is obtained in multiplying the points of $\sigma(\tilde{F}^1)$ by $1-t$, and since the real points of $\sigma(\tilde{F}^1) = \sigma(F^1)$ are in the half plane $R(\lambda) < 1$ and $\tilde{F}^1$ satisfies A' , B' , C' , it follows easily that also $\tilde{F}_t^1$ satisfies A' , B' , C' . We now define for arbitrary x in X

$$F_t(x) = \tilde{F}_t^0 E^0(x) + \tilde{F}_t^1 E^1(x).$$

Since by lemma 4.4, $\sigma(F_t)$ is the union of $\sigma(\tilde{F}_t^0)$ and $\sigma(\tilde{F}_t^1)$ it follows that F_t satisfies assumptions A' , B' , C' , and $f(x) = x - F(x) = x - F_0(x)$ is by (4.6) seen to be homotopic to

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x - F_1(x) = (E^0(x) - \tilde{F}_1^0(x)) + E^1(x) = \tilde{f}_1^0 E^0(x) + E^1(x) \\ &= x & \text{if } N \text{ is even} \\ &= x - 2\varphi(x)x^0 & \text{if } N \text{ is odd.} \end{aligned}$$

It remains to prove that x^0 and $\varphi(x)$ can be chosen arbitrarily subject to the conditions of reality and to

$$(4.7) \quad \|x^0\| = 1, \quad \varphi(x^0) = 1,$$

i.e., we have to show: if

$$f(x) = x - 2\varphi(x)x^0, \quad g(x) = x - 2\psi(x)y^0$$

where x^0, y^0 are real elements of X and $\varphi(x), \psi(x)$ real linear functionals satisfying (4.7) and

$$(4.8) \quad \|y^0\| = 1, \quad \psi(y^0) = 1,$$

then f and g are homotopic. We distinguish two cases:

CASE 1. x^0 and y^0 are linearly dependent. In this case $y^0 = \varepsilon x^0$ where because of (4.7), (4.8), ε is a complex number of absolute value 1. Then

²¹⁾ [I], p. 197.

²²⁾ That $\tilde{F}^0$ is real follows from the assumption that F is the real since $\tilde{F}^0$ is the restriction of F to X^0 .

$\psi(x)y^0 = \tilde{\psi}(x)x^0$ if $\tilde{\psi}(x)$ is defined as $\psi(\varepsilon x)$, and $\tilde{\psi}(x^0) = \psi(\varepsilon x^0) = \psi(y^0) = 1$, which shows that we may assume that $\varepsilon = 1$, i.e., $y^0 = x^0$. With this assumption we set $\varphi_t(x) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x)$ for $0 \leq t \leq 1$. We note that $\varphi_t(x^0) = 1$ and that therefore the spectrum of $F_t(x) = 2\varphi_t(x)x^0$ consists of the points $\lambda = 0$ and $\lambda = 2$, and that the range of the projection belonging to $\lambda = 2$ is of dimension 1. Therefore $F_t(x)$ satisfies A', B', C'. Moreover, with $f_t(x) = x - F_t(x)$ we have $f_0 = f$, $f_1 = g$. Thus f and g are homotopic in the sense of definition 4.1.

CASE 2. x^0 and y^0 are linearly independent. Let X^2 be the subspace of X spanned by x^0 and y^0 , and E^2 a real projection with range X^2 ²³. Let for $x \in X^2$, $\tilde{r}_t(x)$ be a rotation about the origin such that $\tilde{r}_0(x^0) = x^0$, $\tilde{r}_1(x^0) = y^0$ ²⁴, let $r_t = \tilde{r}_t / \|\tilde{r}_t\|$, and let the extension of r_t to all of X be defined by

$$r_t(x) = x - E^2(x) + r_t(E^2(x)).$$

Moreover, set

$$\varphi_t(x) = \varphi(r_t^{-1}(x)), \quad F_t(x) = 2\varphi_t(x)r_t(x^0).$$

If one observes that $\varphi_t(r_t(x^0)) = \varphi(x^0) = 1$, it is easily seen that the spectrum of F_t consists of the points $\lambda = 0$ and $\lambda = 2$, and that F_t satisfies A', B', C'. Therefore setting $f_t(x) = x - F_t(x)$ shows that $f(x)$ is homotopic to $h(x) = x - 2\varphi_1(x)y^0$ since $r_1(x^0) = y^0$. To see finally that h is homotopic to g we have only to notice that we are now in case 1 ²⁵.

LEMMA 4.5. Let X be a complex Banach space with a conjugation, and X_p a p -dimensional linear subspace which is invariant under this conjugation (p a finite integer). Then there exists a real projection E_p of X whose range is X_p (cf. definition 3.3).

PROOF. Without the reality requirement E_p may, according to Mackey ²⁶, be constructed as follows: let $x_1, x_2, \dots, x_p$ be a base for X_p . Then for $j = 1, \dots, p$ the coefficient $f_j(x)$ of x_j in the representation of an element x of X as linear combination of $x_1, \dots, x_p$ is a linear functional on X_p which may be extended to X . Calling the extension again $f_j(x)$, it turns out that $E_p(x) = \sum_{j=1}^p x_j f_j(x)$ is a projection with range X_p . We will now show that with a proper choice of the basis $x_1, \dots, x_p$, E_p is real. We will prove first that it is possible to construct a basis of real elements: let $x \neq 0$ be an element of X_p ; then by assumption $\bar{x} \in X_p$, and therefore $x + \bar{x}$ and $(x - \bar{x})/i$ are real element of X_p at least one of them not being the zero element. Thus if q denotes the maximal number of real elements of X_p which are linearly independent (with respect to complex numbers) then $q \geq 1$. We will prove $q = p$: let $r_1, r_2, \dots, r_q$ be linearly independent real elements of X_p , and

²³) Such E^2 exists by the following lemma 4.5.

²⁴) i.e., if $x = \alpha^0 x^0 + \alpha' y^0$ then $\tilde{r}_t(x) = \beta^0 x^0 + \beta' y^0$ where $\beta^0 = \alpha^0 \cos(t\pi/2) - \alpha' \sin(t\pi/2)$, $\beta' = \alpha^0 \sin(t\pi/2) + \alpha' \cos(t\pi/2)$.

²⁵) Note that $\varphi_1(y^0) = \varphi_1(r_1(x^0)) = \varphi(x^0) = 1$.

²⁶) [7], lemma 3.1.

$x = x' + i x''$ (x', x'' real) an arbitrary element of X_p . It follows from these definitions that there exist constants α'_j, α''_j (which may be complex) such that

$$x' = \sum_{j=1}^q \alpha'_j r_j, \quad x'' = \sum_{j=1}^q \alpha''_j r_j.$$

Then $x = x' + i x''$ is a linear combinations of the r_j which proves that the r_j form a base and $q = p$. Thus we may assume that the elements $x_1, \dots, x_q$ of the original base are all real. But then comparison of

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^q f_j(\bar{x}) x_j \quad \text{with} \quad \bar{x} = \overline{\sum_{j=1}^q f_j(x) x_j} = \sum_{j=1}^q \overline{f_j(x)} x_j$$

shows that $f_j(\bar{x}) = \overline{f_j(x)}$, i.e., that the functionals $f_j(x)$ are real. Therefore, by lemma 4.3 their extensions can also be constructed to be real, and the above constructed projection E_p is then obviously also real.

REMARK 4.2. It is well known²⁷⁾ that the range X_{λ_i} of the projection (2.1) is the space spanned by the solutions of the totality of equations $(\lambda_i I - F)^n = 0$ for $n = 1, 2, \dots$. If now F and λ_i is real then X_{λ_i} is invariant under conjugation (lemma 3.5). It follows (as shown in the proof of lemma 4.5) that X_{λ_i} can be spanned by elements of R , in other words, the dimension m_i of X_{λ_i} is the number of linearly independent solutions in R of the above equations. It follows then from theorem 3.1 that the index $j(f)$ is determined if F is known in R . If F is in addition completely continuous it also follows that $j(f)$ agrees with the Leray-Schauder index of f (cf. [6] p. 57, 58).

THEOREM 4.2. (*Product theorem.*) Let $f(x) = x - F(x)$ and $g(x) = x - G(x)$. Let $F(x), G(x)$, and $x - (fg)(x)$ be real and satisfy A', B', C' . Then

$$(4.9) \quad j(fg) = j(f)j(g).$$

PROOF. If one of the mappings, say f , has index $+1$, then by theorem 4.1 f is homotopic to the identity map and therefore fg is homotopic to g . We have then, again using theorem 4.1, $j(fg) = j(g) = 1 \cdot j(g) = j(f)j(g)$, which proves (4.9) in the case considered. Assume now

$$(4.10) \quad j(f) = j(g) = -1.$$

Then by theorem 4.1, f and g are both homotopic to a map of the form

$$(4.11) \quad h(x) = x - 2\varphi(x)x^0 \quad \text{with} \quad \|x^0\| = \varphi(x^0) = 1.$$

Then fg is homotopic to h^2 , and by theorem 4.1, we have $j(fg) = j(h^2)$. This equality together with (4.10) shows that for the proof of (4.9) it will be sufficient to show that

$$(4.12) \quad j(h^2) = +1.$$

But (4.12) is certainly true since $h^2(x) = x$ as is easily verified from (4.11).

²⁷⁾ See e.g., [I], p. 198.

5. NON LINEAR MAPS. Let X be a complex Banach space, D a bounded open set in X , $\bar{D}$ its closure, and $B = \bar{D} - D$ its boundary. We will define the mapping degree and prove the homotopy property for a class of "smooth" mappings of $\bar{D}$ into X .

DEFINITION 5.1. A mapping

$$(5.1) \quad f(x) = x - F(x)$$

of $\bar{D}$ into X is called smooth if it satisfies the following conditions: i) in each point x of $\bar{D}$, $f(x)$ has a bounded Fréchet differential $d(x, h)$ ²⁸⁾ which is uniformly continuous in x in the sense that to each positive ε there exists a δ such that

$$(5.2) \quad \|d(x, h) - d(x_0, h)\| < \varepsilon \|h\| \quad \text{for} \quad \|x - x_0\| < \delta;$$

ii) $d(x, h)$ (as linear operator in h) has an inverse $d^{-1}(x, h) = l(x, h)$ with a bound which is uniform for all $x \in \bar{D}$; iii) if the point y of X is not on the image of the boundary B of D , then there are at most a finite number of points x in D which satisfy the equation

$$(5.3) \quad f(x) = y;$$

iv) the linear operator in h , $D(x, h) = h - d(x, h)$ satisfies the conditions A, B, C of section 2; v) the image of a closed set is closed.

REMARK 5.1. If only i) and ii) are assumed and $F(x)$ is completely continuous then v) is automatically satisfied; so is iii), for it can be easily seen that otherwise there would be a point x in D satisfying (5.3) in every neighborhood of which there would be other solutions of (5.3) which would be a contradiction to the lemma 5.1 below. If in addition $D(x, h)$ is completely continuous (in h) then iv) is also automatically satisfied.

DEFINITION 5.2. Let $f(x)$ be a smooth mapping of $\bar{D}$ into X , and y a point of X which is not on the image of the boundary B of D . We define the degree $j(f, y, D)$ of f at y with respect to D as follows: if (5.3) has no solution x in D we set $j(f, y, D) = 0$; if there are solutions in D there are by assumption iii) of definition 5.1 only a finite number, say $x_1, x_2, \dots, x_r$. By assumption iv) of definition 5.1 for each of the linear operators in h , $d(x_\rho, h)$ ($\rho = 1, \dots, r$) the index $j_\rho = j(d(x_\rho, h))$ is defined according to definition 2.1. Let p be the number of those j_ρ which are $+1$, and q the number of those which are -1 . Then we define

$$(5.4) \quad j(f, y, D) = p - q^{29)}.$$

²⁸⁾ For fixed x , $d(x, h)$ is a bounded linear operator in h .

²⁹⁾ In the Leray Schauder theory the equality (5.4) is a theorem (cf. [6], p. 56). In finite dimensional spaces p is the numbers of those x for which the Jacobian of $f(x)$ is positive, and q the number of those for which it is negative. With this interpretation (5.4) is the basic definition used as starting point in Nagumo's theory for the degree in finite dimensional spaces. (See [8].)

DEFINITION 5.3. Let $f(x) = x - F(x)$, $g(x) = x - G(x)$ be two smooth mappings of $\bar{D}$ into X . Then f and g are called homotopic if for each t in the interval $0 \leq t \leq 1$ there exists a smooth map

$$(5.5) \quad f_t(x) = x - F(x, t) \quad \text{with} \quad f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = g(x)$$

where $F(x, t)$ is continuous in the product $\Pi = \bar{D} \times \{0 \leq t \leq 1\}$, where the continuity in t for fixed x is uniform for $x \in \bar{D}$, and where moreover the following two conditions are satisfied: a) the Fréchet differential $d(x, t, h)$ of $f_t(x)$ (with respect to x) is continuous in x in the sense that to every positive ε there exist positive numbers δ and τ such that

$$\|d(x, t, h) - d(x_0, t_0, h)\| < \varepsilon \|h\| \quad \text{for} \quad \|x - x_0\| < \delta, \quad |t - t_0| < \tau;$$

b) the inverse $d^{-1}(x, t, h) = l(x, t, h)$ of $d(x, t, h)$ as linear operator in h exists and is bounded uniformly on $\bar{D}$, i.e., there exists a positive m such that

$$(5.6) \quad \|l(x, t, h)\| < m \|h\|.$$

THEOREM 5.1. Let f, g be two smooth mappings of $\bar{D}$ into X , and y a point of X which does not lie on the image of the boundary B of D under f or g . We assume that f and g are homotopic (Def. 5.3) and that moreover the map (5.5) can be chosen such that

$$(5.7) \quad f_t(x) \neq y \quad \text{for} \quad x \in B, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Then

$$(5.8) \quad j(f, y, D) = j(g, y, D).$$

PROOF. It will be obviously sufficient to show that $j(f_t, y, D)$ is continuous in t . To do this we first prove

LEMMA 5.1³⁰⁾. For each t in the unit interval let $f_t(x) = f(x, t) = x - F(x, t)$ be a map of $\bar{D}$ into X which satisfies conditions i) and ii) of definition 5.1, is continuous on the product of $\bar{D}$ with the unit interval, and satisfies conditions a) and b) of definition 5.3. Let $\vartheta, \vartheta_1, a_0, b_0$, and τ be positive numbers which are chosen as follows:

$$(5.9) \quad 0 < \vartheta < \vartheta_1 < 1.$$

a_0 is then chosen in such a way that

$$(5.10) \quad \|d(x, t, h) - d(x_0, t, h)\| < \|h\| \vartheta / m \quad \text{for} \quad \|x - x_0\| < a_0$$

where m is a number satisfying (5.6); this choice is possible by assumption i) of definition 5.1. For b_0 we then choose any number satisfying

$$(5.11) \quad 0 < b_0 < a_0(1 - \vartheta_1)/m.$$

Let x_0 be a point of D and set

$$(5.12) \quad f(x_0, t) = y_0(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

³⁰⁾ Lemma 5.1 and its proof are essentially an adaptation to the present purpose of results and methods contained in [2]. The proof is here given for the sake of completeness and of the possibility of referring later on to some of the inequalities contained in it.

Then choose $\tau > 0$ in such a way that

$$(5.13) \quad \|y_0(t) - y_0(t_0)\| < b_0/2 \quad \text{for} \quad |t - t_0| < \tau.$$

Finally let y be any point of X which satisfies

$$(5.14) \quad \|y - y_0(t)\| < b_0 \quad \text{for} \quad |t - t_0| < \tau.$$

Then the equation for x

$$(5.15) \quad y = f(x, t)$$

has one and only one solution $x = x(y, t)$ which satisfies

$$(5.16) \quad \|x(t, y) - x_0\| < a_0 \quad (|t - t_0| < \tau)$$

and this solution is continuous in the product $D \times \{|t - t_0| < \tau\}$.

PROOF. Subtracting (5.12) from (5.15) and setting

$$(5.17) \quad \begin{cases} x - x_0 = \xi, & y - y_0(t) = \eta, \\ f(x, t) - f(x_0, t) - d(x_0, t, x - x_0) = R(x, x_0, t) \end{cases}$$

we see that the equation for ξ

$$(5.18) \quad \eta(t) = d(x_0, t, \xi) + R(x_0 + \xi, x_0, t)$$

is equivalent to (5.15). Multiplying (5.18) by $d^{-1} = l$ and setting

$$(5.19) \quad l(\eta) = \zeta, \quad l(R(x_0 + \xi, x_0, t)) = -S(x_0, t, \xi)$$

we obtain for ξ the equation

$$(5.20) \quad \xi = \zeta(t) + S(x_0, t, \xi)$$

which is still equivalent to (5.15). In order to solve (5.20) by successive approximations we prove the following two inequalities:

$$(5.21) \quad \|\zeta\| < a_0(1 - \vartheta_1)$$

if (5.14) is satisfied, and

$$(5.22) \quad \|S(x_0, t, \xi'') - S(x_0, t, \xi')\| < \vartheta \|\xi'' - \xi'\|$$

if

$$(5.23) \quad \|\xi''\| < a_0, \quad \|\xi'\| < a_0.$$

The proof of (5.21) is immediate since by (5.19), (5.6), (5.17), (5.14), and (5.11)

$$\|\zeta\| < m \|\eta\| = m \|y - y_0(t)\| < m b_0 < a_0(1 - \vartheta_1).$$

As to the proof of (5.22) we obtain from the definition (5.17) of R using the fact that $d(x, t, \xi)$ is linear in its third argument

$$(5.24) \quad \begin{cases} R(x_0 + \xi'', x_0, t) - R(x_0 + \xi', x_0, t) \\ = [f(x_0 + \xi'', t) - f(x_0 + \xi', t)] - d(x_0, t, \xi'' - \xi'). \end{cases}$$

If we apply the mean value theorem³¹⁾ to the difference in the bracket, the right member of (5.24) may be written as

$$\int_0^1 \{d(x_0 + \xi' + \beta(\xi'' - \xi'), t, \xi'' - \xi') - d(x_0, t, \xi'' - \xi')\} d\beta.$$

Since (5.23) implies the corresponding inequality for $\xi' + \beta(\xi'' - \xi')$ if $0 \leq \beta \leq 1$, we see from (5.10) (with h replaced by $\xi'' - \xi'$) that the norm of the above integral is $< \|\xi'' - \xi'\| \vartheta/m$. Therefore using (5.6) and the definition (5.19) of S we see that

$$\begin{aligned} \|S(x_0, t, \xi'') - S(x_0, t, \xi')\| &= \|l\{R(x_0 + \xi'', x_0, t) - R(x_0 + \xi', x_0, t)\}\| \\ &< m \|R(x_0 + \xi'', x_0, t) - R(x_0 + \xi', x_0, t)\| \\ &< m \|\xi'' - \xi'\| \vartheta/m \end{aligned}$$

which proves (5.22). As a special case we note that the inequality

$$(5.25) \quad \|S(x_0, t, \xi)\| < \vartheta \|\xi\|$$

is obtained from (5.22) by setting $\xi'' = \xi$, $\xi' = 0$ since $S(x_0, t, 0) = 0$ as is seen from (5.19) and (5.17).

Now from the inequalities (5.24), (5.22), and (5.25) one proves in the well-known fashion (see, e.g., [3]) that the iterations

$$\xi_1 = \zeta, \quad \xi_{n+1} = \zeta + S(x_0, t, \xi_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

are well defined (for ζ and t in the domains specified) and satisfy the inequalities

$$\|\xi_n\| < a_0(1 - \vartheta_1)/(1 - \vartheta), \quad \|\xi_n - \xi_{n-1}\| < a_0 \vartheta^{n-1}$$

which show that $\xi = \xi(\zeta, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ exists uniformly and that

$$\|\xi\| \leq a_0(1 - \vartheta_1)/(1 - \vartheta) < a_0.$$

Obviously, ξ satisfies (5.20), and $x = x(y, t)$ obtained from $\xi = \xi(\zeta, t)$ by (5.17) and (5.19) satisfies (5.15). The continuity of $x(y, t)$ follows from the uniformity of the convergence since each iteration ξ_n is continuous in (ζ, t) . The uniqueness of ξ as solution of (5.20) follows in the usual way from (5.22) and (5.9).

We now return to the proof of theorem 5.1. We have to show: if $y = y_1$ is a point of X for which (5.7) is satisfied then there exists a $\tau > 0$ such that

$$(5.26) \quad j(f_t, y_1, D) = j(f_{t_0}, y_1, D) \quad \text{for} \quad |t - t_0| < \tau.$$

We distinguish two cases:

CASE 1. f_{t_0} maps no point of D on y_1 . Then by (5.7) no point of the closed set $\bar{D}$ is mapped on y_1 by f_{t_0} , and it follows from assumption v) of definition 5.1 that the image under f_{t_0} of $\bar{D}$ has a positive distance from y_1 . This again implies by definition 5.3 that for small enough $|t - t_0|$, y_1 is not image point of $\bar{D}$ under the map f_t . Therefore for such t (5.26) is true, both members of the equation being zero by definition 5.2.

³¹⁾ [2].

CASE 2. y_1 is image point of D under the map $f_{t_0} = f(x, t_0)$. Then by assumption iii) of definition 5.1 there are only a finite number of points in D , say $x^1, x^2, \dots, x^r$ in D such that

$$(5.27) \quad f(x^q, t_0) = y_1 \quad (q = 1, 2, \dots, r).$$

Now by theorem 2.1 there exists an $\varepsilon > 0$ such that any bounded linear operator $l^q(\xi)$ which satisfies the inequality

$$(5.28) \quad \|d(x^q, t_0, \xi) - l^q(\xi)\| < \varepsilon \|\xi\|$$

satisfies also the equality

$$(5.29) \quad j(d^q, t_0, \xi) = j(l^q(\xi)).$$

In order to construct the required τ we remark first that by assumption a) of definition 5.3 it is possible to choose two positive numbers τ_1 and δ such that

$$(5.30) \quad \|d(x^q, t_0, \xi) - d(x, t, \xi)\| < \varepsilon \|\xi\|$$

if

$$(5.31) \quad |t - t_0| < \tau_1$$

and

$$(5.32) \quad \|x - x^q\| < \delta.$$

We now choose a number a_0 which satisfies the following requirements:

i) (5.10) is satisfied with $x_0 = x^q$; ii) we have

$$(5.33) \quad |a_0| < \delta;$$

iii) the r solid spheres with centers x^q and radius a_0 are disjoint and contained in D . We then choose a number b_0 subject to the restriction (5.11), and a number τ_2 such that

$$(5.34) \quad \|f(x^q, t) - f(x^q, t_0)\| < b_0/2$$

if

$$(5.35) \quad |t - t_0| < \tau_2.$$

We finally choose a positive number τ_3 as follows: let C be the closure of the set obtained from D by cutting out the spheres with centers x^q and radius a_0 , and denote by $f_t(C)$ the image of C under the map f_t . Then $f_{t_0}(C)$ does not contain y_1 . Therefore by assumption v) of definition 5.1, $f_{t_0}(C)$ has a positive distance from y_1 . Consequently, there exists a τ_3 such that $f_t(C)$ does not contain y_1 for $|t - t_0| < \tau_3$; we can then conclude that for some q of the set $1, 2, \dots, r$

$$(5.36) \quad \|x - x^q\| < a_0 \quad \text{if} \quad f(x, t) = y_1 \quad \text{and} \quad |t - t_0| < \tau_3.$$

We claim that (5.26) holds with $\tau = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Indeed, consider $f_t = f(x, t)$ for a t in $|t - t_0| < \tau$. Let

$$(5.37) \quad f(x^q, t) = y^q(t).$$

With the choice of the constants a_0, b_0, τ made we can apply lemma 5.4 with $x_0 = x^e$ and $y_0(t) = y^e(t)$ and see that the equation

$$(5.38) \quad f(x, t) = y$$

has for all y satisfying

$$(5.39) \quad \|y - y^e(t)\| < b_0$$

one and only one solution $x^e(y, t)$ which satisfies the inequality

$$(5.40) \quad \|x^e(y, t) - x^e\| < a_0.$$

Now by (5.34), (5.27), and (5.37), $y = y_1 = f(x^e, t_0)$ satisfies (5.39). Therefore the equation for x

$$(5.41) \quad f(x, t) = y_1$$

has one and only one solution $x_1^e = x^e(y_1, t)$ in (5.40). Then, by (5.33), $x = x_1^e$ satisfies (5.32). Consequently, since t satisfies (5.34) we see that $d(x_1^e, t, \xi)$ satisfies (5.30), i.e., that (5.28) is true with $l^e(\xi) = d(x_1^e, t, \xi)$, and gives us the equality

$$(5.42) \quad j(d(x^e, t_0, \xi)) = j(d(x_1^e, t, \xi)).$$

Since by (5.36) $x_1^e, x_1^2, \dots, x_1^r$ are the only solutions in D of (5.41) we obtain by definition 5.2 of the degree the desired equality (5.26) by summing (5.42) over q .

THEOREM 5.2. *Let $y = f(x)$ be a smooth mapping of the closure of the open bounded domain D of X into X , and y_0 a point of X which is not situated on the image of the boundary B of D . Then there exists a positive number b_0 such that*

$$(5.43) \quad j(f, y, D) = j(f, y_0, D) \quad \text{for} \quad \|y - y_0\| < b_0.$$

PROOF. We distinguish two cases. Case 1. No point of D is mapped on y_0 . Then it is easily seen from assumption v) of definition 5.1 that for small enough $\|y - y_0\|$, the point y is also not in the image of D or B . Therefore for such y equation (5.43) is true, both members of the equality being zero.

CASE 2. Some points of D are mapped on y_0 . In this case let $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^r$ be the points of D which are mapped on y_0 . We choose a number a_0 which satisfies the following conditions: i) (5.10) is satisfied with $x_0 = x_0^e$ ($e = 1, 2, \dots, r$); ii) the equality

$$(5.44) \quad j(d(x_0^e, \xi)) = j(d(x, \xi)) \quad \text{for} \quad \|x - x_0^e\| < a_0$$

holds for $e = 1, 2, \dots, r$, this choice being possible on account of (5.2) and theorem 2.1; iii) the spheres with centers x_0^e and radius a_0 are disjoint and lie in D . We then choose a number b_0 subject to the following conditions: i) (5.11) is satisfied; ii) the sphere with radius b_0 about y_0 does not intersect the image of B which choice is possible by assumption v) of definition 5.1; iii) let C be the closure of the complement in D of the union of the spheres $\|x - x_0^e\| < a_0$; the image of C does not contain y_0 and has therefore (by the

assumption just mentioned) a positive distance from y_0 ; we choose b_0 less than this distance. We claim that (5.43) is satisfied with this choice of b_0 . Indeed, if $\|y - y_0\| < b_0$ then the equation $f(x) = y$ can have a solution only in one of the spheres $\|x - x_0^q\| < a_0$, and by lemma 5.1³²⁾ it has exactly one, say $x = x^q$, in each of these spheres. Then (5.44) holds for $x = x^q$, and it follows from definition 5.2 that we obtain (5.43) by summing (5.44) (with x replaced by x^q) over q .

6. REAL BANACH SPACES. The preceding sections dealt with complex Banach spaces. However, it is easy to carry over the theory from such spaces to real Banach spaces by imbedding them into a complex Banach space as will be done in this section.

DEFINITION 6.1. We say that the real Banach space R is imbedded in the complex Banach space X if X has a conjugation (def. 3.1) of the following property: let R_1 be the Banach space over the reals which is formed by the elements of X which are invariant under this conjugation³³⁾; then R and R_1 are algebraically isomorphic and isometric.

LEMMA 6.1. *Every real Banach space R can be imbedded in a complex Banach space.*

PROOF. We construct X as follows: the elements x of X are the ordered couples $x = (x', x'')$ where x', x'' are elements of R . If $x = (x', x'')$ and $y = (y', y'')$ are two elements of X and $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ a complex number we define the linear operations by

$$x + y = (x' + y', x'' + y''), \quad \alpha x = (\alpha' x' - \alpha'' x'', \alpha' x'' + \alpha'' x').$$

Finally, following Krein and Gelfand [I. Gelfand, Normierte Ringe, Recueil Math., T. 9 (51), 1941, 3-23, §8] we define the norm $\|x\|$ of the element $x = (x', x'')$ by $\|x\| = \sup_{\varphi} \|x' \cos \varphi + x'' \sin \varphi\|$.

DEFINITION 6.2. Let

$$(6.1) \quad y = f(x) = x - F(x)$$

be a linear non singular map of the real Banach space R into itself with completely continuous $F(x)$. Denote by $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ those eigenvalues of $F(x)$ which are real greater than 1³⁴⁾. Let m_i be the number of linearly independent solutions in R of the totality of equations $(\lambda_i x - F(x))^n = 0$ for $n = 1, 2, \dots$ ³⁵⁾. We then define the index $j(f)$ of f by the equation

$$(6.2) \quad j(f) = \sum_{i=1}^p (-1)^{m_i}.$$

³²⁾ We apply lemma 5.1 with $f(x, t) \equiv f(x)$.

³³⁾ Cf. Definition 3.2 and lemma 3.1.

³⁴⁾ That there are at most a finite number of eigenvalues > 1 is a well known consequence of the complete continuity of F .

³⁵⁾ It is well known that m_i is finite.

THEOREM 6.1. *Let $F(x)$ satisfy the assumptions of definition 6.2. Then there exists a $\delta > 0$ of the following property: if $g(x) = x - G(x)$ where $G(x)$ is completely continuous and*

$$(6.3) \quad \|f - g\| = \|F - G\| < \delta,$$

then

$$(6.4) \quad j(f) = j(g).$$

PROOF. Let X be the complex Banach space in which R is imbedded by lemma 6.1. By lemma 3.2 every element of x of X is of the form

$$(6.5) \quad x = x' + i x'' \quad \text{where} \quad x' = (x + \bar{x})/2 \quad \text{and} \quad x'' = (x - \bar{x})/2i \quad \text{are in } R.$$

We define

$$\tilde{F}(x) = F(x') + iF(x''), \quad \tilde{f}(x) = x - \tilde{F}(x)$$

and $\tilde{G}, \tilde{g}$ correspondingly. It is then easily verified that $\tilde{F}(x)$ is a linear completely continuous map of X into itself and that the real points of its spectrum coincide with the real eigenvalues of $F(x)$. Moreover, $\tilde{F}(x)$ is real in the sense of definition 3.3 and satisfies the assumptions A', B', C' of section 3 (cf. remark 3.4). Now by remark 4.2 the numbers m_i of definition 6.1 agree with those of theorem 3.4. Therefore

$$(6.6) \quad j(f) = j(\tilde{f})$$

and similarly

$$(6.7) \quad j(g) = j(\tilde{g}).$$

Now by theorem 3.2 there exists an $\varepsilon > 0$ such that

$$(6.8) \quad j(\tilde{f}) = j(\tilde{g})$$

if

$$(6.9) \quad \|\tilde{F} - \tilde{G}\| < \varepsilon.$$

We now set $\delta = \varepsilon/2$ and claim that with this δ , (6.3) implies (6.4). Indeed, if we set $H = F - G$ and $\tilde{H} = \tilde{F} - \tilde{G}$, we obtain, recalling (6.5) and (3.3)

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(x) - \tilde{G}(x)\| &= \|\tilde{H}(x)\| = \|H(x') + iH(x'')\| \leq \|H\| \{\|x'\| + \|x''\|\} \\ &= \|H\| \{\|x + \bar{x}\| + \|x - \bar{x}\|\}/2 \\ &\leq \|H\| \{\|x\| + \|\bar{x}\|\} = 2\|H\| \cdot \|x\| \\ &= 2\|F - G\| \|x\| \leq 2\delta \|x\| = \varepsilon \|x\| \end{aligned}$$

thus proving (6.9) and therefore (6.8). (6.4) follows now from (6.6) and (6.7).

REMARK 6.1. Let R be a real Banach space. Let D be a bounded open set of R , $\bar{D}$ its closure, B its boundary, and let (6.1) be a map of $\bar{D}$ into R with completely continuous (not necessarily linear) $F(x)$. We then call $j(x)$ smooth if it satisfies conditions i) and ii) of definition 5.1 and if in addition the linear operator in h , $D(x, h) = h - d(x, h)$ is completely continuous (cf.

Remark 5.1). Perusal of section 5.1 shows then that everything said in this section remains valid if the following substitutions are made throughout: i) X is replaced by R ; ii) definition 5.1 of a smooth map is replaced by the definition just given; iii) references to theorem 2.1 are replaced by references to theorem 6.1, and definition 2.1 by definition 6.2.

By the preceding remark the degree is defined and homotopy properties are established for smooth mappings in a real Banach space R^{36}).

Bibliography.

- [1] DUNFORD, N.: Spectral theory. I. Convergence to projections. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 185—217 (1943). — [2] GRAVES, L. M.: Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 163—177 (1927). — [3] GRAVES, L. M., and T. H. HILDEBRANDT: Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 126—153 (1927). — [4] HILLE, E.: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Colloquium Publications **21** (1948). — [5] LERAY, J.: La theorie des points fixes et ses applications en analyse. Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. U.S.A., 1950. Publ. Amer. Math. Soc. **2**, 202—207 (1952). — [6] LERAY, J., et J. SCHAUDER: Topologie and équations fonctionnelles. Ann. sci. École norm. sup. (3) **51**, 45—78 (1934). — [7] MACKEY, G. W.: Isomorphisms of normed linear spaces. Ann. Math. **43**, 244—260 (1942). — [8] NAGUMO, M.: A theory of the degree of mapping based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. **73**, 485—496 (1951). — [9] NAGUMO, M.: Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. **73**, 485—496 (1951). — [10] SCHWARTZ, J.: Perturbations of spectral operators and applications. I. Bounded perturbations. Pacific J. Math. **4**, 415—458 (1954). — [11] STONE, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer. Math. Soc., Colloquium Publications **15** (1932).

³⁶⁾ This degree agrees with the one defined by Leray and Schauder. The latter, however, applies to a wider class of mappings.

Dept. of Math., University of Michigan, Ann Arbor, Mich. (U.S.A.).

(Eingegangen am 16. März 1955.)

Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome.

Von

PAUL BERNAYS.

Meinem verehrten Lehrer ISSAI SCHUR zum Gedenken.

§ 1. Die im folgenden dargestellten Überlegungen knüpfen sich an die Formulierung der Stetigkeitseigenschaft des Systems der reellen Zahlen mit Hilfe des Hilbertschen Vollständigkeitsaxioms. Dieses Axiom, an den Schluß eines Axiomensystems gestellt, besagt ja, als „Maximalaxiom“, daß das zu kennzeichnende System von Dingen bei Aufrechterhaltung der Beziehungen und Verknüpfungen zwischen diesen Dingen sowie auch der Erfüllung der vorhergehenden Axiome keiner Erweiterung fähig ist.

Der methodisch komplizierte Charakter dieser Forderung, wie ihn die Bezugnahme auf die anderen Axiome mit sich bringt¹⁾, läßt sich jeweils beheben; jedoch muß dann im allgemeinen eine schwerfällige Fassung und eine Einbuße an Prägnanz in Kauf genommen werden. Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß im Falle des Axiomensystems für die reellen Zahlen das Vollständigkeitsaxiom von der Bezugnahme auf die anderen Axiome auf eine ungezwungene Art und ohne Verlust an Prägnanz befreit werden kann.

Hierzu gehen wir davon aus, daß bei dem betrachteten Axiomensystem²⁾ die dem Vollständigkeitsaxiom vorhergehenden Axiome besagen, daß die reellen Zahlen mit ihren Rechenverknüpfungen und der Größenbeziehung einen geordneten Körper bilden, welcher dem Archimedischen Axiom genügt, kurz: einen archimedischen geordneten Körper. Von der Ordnung eines Körpers soll eo ipso verlangt sein, daß außer den allgemeinen Eigenschaften der Beziehung $<$ auch die beiden folgenden zutreffen:

- (1) Wenn $a < b$ und c beliebig, so $a + c < b + c$.
- (2) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$.

Eine Erweiterung eines Körpers mit Erhaltung der Rechenverknüpfungen und ihrer Gesetze wird üblicherweise eine *Körpererweiterung* genannt. Die Aussage des Vollständigkeitsaxioms bezogen auf die Axiome, welche einen

¹⁾ Auf diese speziell für die axiomatischen Untersuchungen sich auswirkende Kompliziertheit wurde insbesondere von R. BALDUS hingewiesen: Zur Axiomatik der Geometrie. I. Math. Ann. **100**, 321—333 (1928). Daß andererseits diese Komplikation die logistische Formalisierung des Vollständigkeitsaxioms nicht hindert, wurde von R. CARNAP und F. BACHMANN gezeigt: Über Extremalaxiome. Erkenntnis **6**, 166—188 (1936).

²⁾ Vgl. die Fassung im Anhang VI („Über den Zahlbegriff“) der „Grundlagen der Geometrie“ von D. HILBERT, 7. Aufl. 1930.

archimedischen geordneten Körper als solchen kennzeichnen, ist nun ersichtlich gleichbedeutend mit der Forderung, daß jede Körpererweiterung, welche zugleich eine Erweiterung der Ordnung ist, zu einem nicht-archimedischen Körper führt. Demnach erhalten wir die folgende Charakterisierung des Systems der reellen Zahlen: *Das System der reellen Zahlen ist ein archimedischer geordneter Körper von der Eigenschaft, daß jeder geordnete Erweiterungskörper, der die vorherige Ordnung beibehält, nicht-archimedisch ist.*

Wir können hier die Formulierung noch enger wählen, ohne an dem axiomatisch Geforderten etwas zu ändern. Nämlich es genügt ja, jeweils solche Erweiterungskörper zu betrachten, die (nach der üblichen Ausdrucksweise der Algebra) durch Adjunktion eines einzigen Elementes zu dem betreffenden Körper entstehen. Denn jeder Erweiterungskörper hat ja einen Körper der genannten Art als Unterkörper. Somit läßt sich die obige Formulierung durch die folgende ersetzen: *Das System der reellen Zahlen ist ein solcher archimedischer geordneter Körper, bei welchem jede Erweiterung durch Adjunktion eines neuen Elementes entweder die Ordnung stört oder zu einem nicht-archimedischen Körper führt.*

Beachten wir ferner, daß jede *algebraische* Erweiterung eines archimedischen geordneten Körpers, welche die Ordnung erhält, wieder einen archimedischen geordneten Körper ergibt, so gelangen wir zu folgender Formulierung: *Das System der reellen Zahlen ist ein solcher archimedischer geordneter Körper, bei welchem 1. jede algebraische Erweiterung die Ordnung stört, 2. jede transzendente Erweiterung nur mit einer solchen Erweiterung der Ordnung verbunden werden kann, welche nicht-archimedisch ist.*

Die Bedingung 1. ist gleichwertig derjenigen, daß der Körper, wie man es nennt, reell algebraisch abgeschlossen ist; dieses kann man z.B. daraus ersehen, daß einerseits in einem Körper, der diese Bedingung erfüllt, jedes positive Element eine Quadratwurzel besitzen muß und daher, für jedes Element a des Körpers, a selbst oder $-a$ ein Quadrat ist, und daß andererseits bei einem Körper mit dieser Eigenschaft eine den Anforderungen (1) und (2) entsprechende Ordnung nur auf eine Art möglich ist. Die Bedingung 2. besagt, daß bei einer Erweiterung durch Adjunktion eines relativ transzendenten Elementes dieses neue Element sich nicht archimedisch unter die vorherigen Elemente einordnen läßt.

§ 2. Die Situation, wie sie bei einem archimedischen geordneten und reell abgeschlossenen Körper K vorliegt, wenn jede Adjunktion eines transzendenten Elementes a den archimedischen Charakter der Ordnung aufhebt, läßt sich näher verdeutlichen.

Der aus K durch Adjunktion von a entstehende Körper $K(a)$ sei in solcher Weise geordnet, daß die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind und daß für die Elemente von K die Ordnung die vorherige bleibt. Schalten wir nun den Fall aus, wo a „unendlich groß“ ist, d.h. entweder größer als jedes ganzzahlige positive oder kleiner als jedes ganzzahlige negative Vielfache der Einheit e von K , so erzeugt a einen Schnitt in der Menge der rationalen Vielfachen

von e . Würde dieser Schnitt nicht auch durch ein Element von K erzeugt, so gäbe es in einem archimedischen Erweiterungskörper K' ein Element, das ihn erzeugt. Dieses Element könnte aber nach unseren Annahmen über K weder algebraisch in bezug auf K noch auch relativ transzendent zu K sein. Somit gibt es in K ein Element b , das den gleichen Schnitt in der Menge der rationalen Vielfachen von e erzeugt, wie das zu K adjungierte Element a ; und es kann daher zwischen a und b kein Element des archimedischen Körpers K liegen. Die aus den Elementen von K und dem Element a gebildete Menge in der im Körper $K(a)$ gegebenen Ordnung ist somit *nicht dicht geordnet*.

So ergibt sich, daß bei einem archimedischen geordneten Körper K , welcher die am Ende von § 1 formulierte Vollständigkeitsbedingung erfüllt, jede Erweiterung zu einem geordneten Körper $K(a)$ so beschaffen ist, daß die geordnete, aus a und den Elementen aus K bestehende Teilmenge von $K(a)$ entweder a als erstes oder letztes Element hat, oder zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente besitzt, und daher nicht dicht geordnet ist³⁾. Diese Feststellung legt es nahe, in der axiomatischen Charakterisierung des Systems der reellen Zahlen die körpertheoretische Vollständigkeitsbedingung durch die einfachere ordnungstheoretische Bedingung zu ersetzen, daß bei Hinzunahme eines Elementes keine solche Erweiterung der Ordnung möglich ist, bei welcher die Eigenschaft der Dichtigkeit der Ordnung zusammen mit derjenigen, daß kein erstes und kein letztes Element vorhanden ist, aufrechterhalten wird.

Für einen geordneten Körper ist diese Bedingung, wie man ohne Mühe erkennt, gleichbedeutend mit derjenigen, daß die Ordnung eine *im Dedekindschen Sinne lückenlose* ist, worin zugleich enthalten ist, daß sie eine archimedische ist. Andererseits existiert, wie man weiß, zu jedem archimedischen, aber nicht lückenlos geordneten Körper ein archimedischer Erweiterungskörper.

Auf diese Weise ergibt sich, daß einerseits bei Verwendung der ordnungstheoretischen Vollständigkeitsbedingung die Forderung, daß der Körper archimedisch sei, weggelassen werden kann, und andererseits, daß in Anwendung auf archimedische Körper die ordnungstheoretische Vollständigkeitsbedingung nicht mehr verlangt als die (dem Wortlaut nach schwächere) körpertheoretische Vollständigkeitsbedingung. Demnach läßt sich *das System der reellen Zahlen axiomatisch auch charakterisieren als ein solcher geordneter Körper, dessen Ordnung bei Hinzunahme eines Elementes entweder die Eigenschaft der Dichtigkeit einbüßt oder ein erstes oder ein letztes Element erhält*.

Daß in dieser Kennzeichnung die Forderung des archimedischen Charakters der Ordnung als herleitbar wegfällt, bedeutet einerseits eine Vereinfachung, kann jedoch andererseits in Hinsicht auf die axiomatische Analyse als Nachteil empfunden werden.

§ 3. Zwischen der körpertheoretischen und der ordnungstheoretischen Fassung der Vollständigeitseigenschaft des Systems der reellen Zahlen kann

³⁾ Man beachte, daß gleichwohl der Körper $K(a)$, sowie jeder geordnete Körper, dicht geordnet ist.

ein Mittelweg gesucht werden, auf eine Art, die keineswegs künstlich ist. Dazu werden wir hingeleitet, wenn wir erwägen, worauf allgemein das Prädikat „archimedisch“ zu beziehen ist. Daß dieses Prädikat nicht rein ordnungstheoretisch ist, wird schon dadurch plausibel gemacht, daß in der Formulierung des Archimedischen Postulates der nicht-ordnungstheoretische Begriff des Vielfachen auftritt. Dieser Umstand allein würde aber noch nicht ausschließen, daß etwa jeder archimedische Körper schon dem Ordnungstypus nach von einem nicht-archimedischen verschieden wäre. Daß aber dieses tatsächlich nicht der Fall ist, zeigt das einfachste Beispiel eines nicht-archimedischen Körpers: der Körper aller derjenigen rationalen Funktionen von t , welche ausgehend von der Variablen t durch Anwendung der elementaren Rechenoperationen erhalten wird, wobei das Vorzeichen und damit die Ordnung sich folgendermaßen bestimmt. Jedes Element außer 0 ist darstellbar in der Form

$$t^k \cdot \frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m}{1 + b_1 t + \dots + b_n t^n},$$

wobei k ganz rational, $a_0, a_1 \dots a_m, b_1, b_2 \dots b_n$ rational und $a_0 \neq 0$ ist. Als Vorzeichen des Elementes wird das Vorzeichen von a_0 genommen und die rationale Funktion $P(t)$ heißt größer als $Q(t)$, kleiner als $Q(t)$ oder gleich $Q(t)$, je nachdem $P(t) - Q(t)$ positiv, negativ oder 0 ist. Diese Ordnung ist eine dichte und ohne erstes und letztes Element. Außerdem aber lassen sich die Elemente des Körpers in eine Abzählung bringen. Somit ist der Typus der Ordnung nach einem Satz der Mengenlehre der gleiche wie derjenige der gewöhnlichen Ordnung des archimedischen Körpers der rationalen Zahlen.

Der Unterschied zwischen dem Archimedischen und Nicht-archimedischen bezieht sich also nicht schlechtweg auf die Ordnung. Andererseits ist die Unterscheidung nicht nur auf geordnete Körper anwendbar, sondern auch schon auf geordnete additive Gruppen, bei denen die Ordnung mit der Addition durch die Bedingung (1) verkoppelt ist. Eine solche geordnete Gruppe ist vollständig bestimmt durch das System ihrer positiven Elemente. Diese bilden ein *Größensystem*. Darunter verstehen wir eine additive Halbgruppe ohne 0-Element und mit relativen Komplementen, genauer gesagt: ein System von Elementen, für welche eine assoziative und kommutative Addition definiert ist mit den Eigenschaften, daß $a + b \neq a$ und für $a \neq b$ stets eine der Gleichungen $a + x = b$, $b + x = a$ eine Lösung x hat. Hier läßt sich die Ordnungsbeziehung $a < b$ durch die Lösbarkeit der Gleichung $a + x = b$ definieren, und es werden dann alle Eigenschaften der Größenbeziehung beweisbar.

Von einem Größensystem kann man stets durch Bildung von Paaren und geeignete Definitionen von Gleichheit, Kleinerbeziehung und Summe zu einer geordneten additiven Gruppe übergehen, für welche das System der positiven Elemente jenem Größensystem isomorph ist. Das geschieht ganz analog wie der Übergang von einem Ring ohne Nullteiler zu dem Quotientenkörper.

Die Größensysteme sind nun diejenigen geordneten Gesamtheiten, auf welche sich ursprünglich der Unterschied von Archimedisch und Nicht-archimedisch bezieht. Hier können wir auch einen Vollständigkeitsbegriff

im Sinne des Vollständigkeitsaxioms einführen. Ein archimedisches Größensystem möge vollständig heißen, wenn jedes echt umfassende Größensystem nicht-archimedisches ist. Man zeigt auf bekannte Weise, daß ein Größensystem dann und nur dann ein archimedisches und vollständiges ist, wenn seine Ordnung eine dichte und lückenlose ist.

Für die archimedischen Größensysteme läßt sich auf klassische Art die Proportionslehre mittels Dedekindscher Schnitte gewinnen, indem das Verhältnis $c:a$ erklärt wird als die Menge derjenigen geordneten Paare natürlicher Zahlen $\langle k, l \rangle$, für welche der Wert der k -gliedrigen Summe aus Summanden a kleiner ist als der Wert der l -gliedrigen Summe aus Summanden c . Die Proportion $c:a = d:b$ wird dann durch die Übereinstimmung der Mengen $c:a$, $d:b$ erklärt und die Ungleichung $c:a < d:b$ als die Aussage, daß die Menge $c:a$ eine echte Teilmenge von $d:b$ ist. Die Paarmengen, welche die Verhältnisse bilden, besitzen die bekannten Eigenschaften eines Schnittes. Im Falle der Vollständigkeit des Größensystems läßt sich andererseits beweisen, daß jede Menge von Paaren $\langle k, l \rangle$, welche diese Eigenschaften besitzt, als Verhältnis von Größen auftritt, sowie auch, daß zu drei Größen stets eine vierte Proportionale existiert.

Von diesen Begriffen ausgehend, kann nun das System der positiven reellen Zahlen gekennzeichnet werden als ein vollständiges archimedisches Größensystem, worin ein Element e als Einheit ausgezeichnet ist. Die Multiplikation läßt sich hier definitorisch einführen, indem das Produkt von a und b erklärt wird als dasjenige Element c , welches die Proportion $c:a = b:e$ erfüllt. Von einem solchen Größensystem kann man auf die vorhin erwähnte Art zu einer additiven Gruppe übergehen, womit dann die Struktur des Systems aller reellen Zahlen gewonnen wird. Das System der reellen Zahlen kann also auch gekennzeichnet werden als diese Erweiterung eines vollständigen archimedischen Größensystems mit ausgezeichneter Einheit zu einer additiven Gruppe.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Beweisbarkeit des archimedischen Charakters einer Ordnung aus der Lückenlosigkeit nur für die Ordnung von Größensystemen oder von additiven Gruppen besteht. Allgemein kann ja ein jeder Ordnungstypus durch geeignete Hinzufügung von Elementen zu einem lückenlosen ergänzt werden, jedoch gelangt man durch die Anwendung dieses Verfahrens auf die Ordnung eines nicht-archimedischen Größensystems nicht wieder zu einem Größensystem.

§ 4. Wie schon am Ende von § 2 erwähnt wurde, erscheint es vom axiomatischen Standpunkt als wünschenswert, die Formulierung derjenigen Stetigkeitseigenschaft eines Größensystems oder eines Körpers, welche zu der im Archimedischen Axiom ausgesprochenen hinzutritt, von diesem Axiom abzusondern. Dieser Zweck wird bei der Anwendung des Axioms der Lückenlosigkeit nicht erreicht, da ja aus der Lückenlosigkeit eines Größensystems schon folgt, daß dieses archimedisches ist. Aber auch die in § 1 und § 3 formulierten Vollständigkeitsbedingungen sind in der genannten Hinsicht nicht befriedigend, da diese Forderungen für nicht-archimedische Größensysteme

bzw. Körper (abgesehen von derjenigen der reell algebraischen Abgeschlossenheit), eo ipso erfüllt und insofern doch nur als Ergänzungen zum Archimedischem Axiom bedeutungsvoll sind.

Eine wirkliche Absonderung der zusätzlichen Vollständigkeitsbedingung von dem Archimedischem Axiom läßt sich aber erreichen. Insbesondere gelingt dieses mittels des *Cantorschen Stetigkeitsaxioms*, welches in seiner rein ordnungstheoretischen Form besagt: Zu jeder Folge von Intervallen (Elementepaaren) (a_n, b_n) von der Eigenschaft, daß

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gibt es ein Element c , das in sämtlichen Intervallen liegt. Die Forderung dieses Axioms ist aus der Forderung der Lückenlosigkeit als Konsequenz zu entnehmen. Andererseits kann unter der Voraussetzung des Archimedischem Axioms aus dem Cantorschen Axiom die Lückenlosigkeit gefolgert werden. Es kommt nun darauf an, zu erkennen, daß auch für nicht-archimedische Größensysteme und Körper das Cantorsche Axiom in der angegebenen Fassung erfüllt sein kann.

Daß der Nachweis hierfür nur durch Betrachtung komplizierterer Modelle möglich ist, beruht auf dem Umstand, daß unter einer gewissen ordnungstheoretischen Bedingung, welche eine Abschwächung des Archimedischem Postulates bildet, die Erfüllung des Cantorschen Axioms für einen Körper diejenige des Archimedischem Axioms zur Folge hat. Diese Bedingung lautet:

- (3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Jedes nicht leere und nach rechts offene Anfangsstück} \\ \text{der Ordnung ist mit einer abzählbaren Folge konfimal,} \end{array} \right.$

d.h. (nach Hausdorff), es gibt in dem Anfangsstück eine abzählbare Folge, welche zu jedem Element des Anfangsstückes ein späteres Glied enthält.

Daß in der Tat ein nicht-archimedisches Körper, welcher die Bedingung (3) erfüllt, nicht dem Cantorschen Axiom genügen kann, ergibt sich folgendermaßen. Sei a ein positives Element und b im Verhältnis zu a unendlich groß; dann bildet die Menge der Elemente, die im Verhältnis zu b unendlich klein sind, ein nicht leeres und nach rechts offenes Anfangsstück der Ordnung des Körpers. Auf Grund der Bedingung (3) ist dieses Anfangsstück mit einer abzählbaren (aufsteigenden) Folge $a_1, a_2, \dots$ konfimal. Nehmen wir nun für b_n das Element $b/2^n$, so erkennt man sofort, daß die Folge der Intervalle (a_n, b_n) eine Verletzung des Cantorschen Axioms darstellt. (Die gleiche Überlegung ist auch allgemein auf ein Größensystem anwendbar, sofern dieses zu jedem Element auch die Hälfte enthält.)

Das gewünschte Modell eines nicht-archimedischem, aber dem Cantorschen Axiom genügenden Körpers muß hiernach gegen die Bedingung (3) verstoßen.

Zur Aufstellung eines solchen Modells können wir so verfahren⁴). Wir bilden zunächst ein geordnetes System S , welches die Vereinigung von

⁴) Die Methode der Konstruktion wurde von P. HERTZ gemeinsam mit dem Verfasser entwickelt. Vgl. P. HERTZ: Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor. C. R. Soc. phys. et d'histoire nat. de Genève 51, 179—181 (1934).

Systemen S_ν ist, wo ν eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist und $S_\mu < S_\nu$ für $\mu < \nu$. S_0 besteht aus nur einem Element. $S_{\nu+1}$ wird aus S_ν durch folgende Hinzufügungen gewonnen: Für jedes Element, zu dem in S_ν kein unmittelbar folgendes bzw. vorhergehendes existiert, wird ein unmittelbar folgendes bzw. vorhergehendes hinzugefügt. Ferner wird zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente von S_ν je ein Element eingeschaltet. Zur Gewinnung von S_λ für eine Limeszahl λ bildet man zuerst $\sum_{\nu < \lambda} S_\nu$, fügt dann an sämtlichen Lückenstellen der erhaltenen Ordnung ausfüllende Elemente ein und fügt ferner noch ein erstes und ein letztes Element hinzu.

Das so gewonnene geordnete System S hat insbesondere die folgenden Eigenschaften: (a) Die Ordnung ist dicht; (b) das Cantorsche Axiom ist erfüllt; (c) zu jeder aufsteigenden Folge von Elementen, die einem Element b vorausgehen, gibt es ein Element vor b , dem auch noch alle Elemente der Folge vorausgehen, und das gleiche gilt auch für die umgekehrte Ordnung.

Aus dem System S erhalten wir eine additive Gruppe A durch Bildung von endlichen oder abzählbar wohlgeordneten Summen $\sum_{x < \nu} c_x s_x$, worin die s_x (die Komponenten) Elemente aus S sind, deren Aufeinanderfolge in der Summe ihrer Ordnung in S entspricht, und die c_x (die Koeffizienten) reelle Zahlen $\neq 0$ sind. Auch die leere Summe ist zugelassen; sie bildet das 0-Element von A . Als Vorzeichen einer nicht leeren Summe gilt das Vorzeichen von c_0 . Zwei Elemente von A lassen sich komponentenweise addieren und subtrahieren, da ja die Vereinigung zweier entsprechend der Ordnung in S wohlgeordneter, höchstens abzählbarer Mengen von Elementen aus S wieder eine solche Menge liefert. Ein Element a von A heißt dann und nur dann kleiner bzw. größer als das Element b , wenn die Differenz $b - a$ positiv bzw. negativ ist. Gemäß dieser Festsetzung ist von zwei Elementen aus A mit verschiedenen Anfangskomponenten dasjenige, dessen Anfangskomponente in der Ordnung von S vorausgeht, in A das größere und sogar unendlich groß im Verhältnis zu dem anderen. Ferner besitzt die Ordnung von A die vorhin für S festgestellten Eigenschaften (a), (b) und (c). Die Dichtigkeit ersieht man ohne weiteres; die Eigenschaft (c) ergibt sich aus dem Umstande, daß zu jeder absteigenden Folge $a_1, a_2, \dots$ von positiven Elementen aus A stets noch ein kleineres positives Element existiert; für die Verifikation der Erfüllung des Cantorschen Axioms muß man die verschiedenen möglichen Fälle diskutieren, wobei die Eigenschaften (b) und (c) der Ordnung von S , sowie die Lückenlosigkeit des Kontinuums wesentlich benutzt werden.

Ähnlich wie beim Übergang von S zu der additiven Gruppe A gehen wir nun von A zu einem Ring B über: Wir bilden wiederum endliche und abzählbar wohlgeordnete Summenausdrücke, aber jetzt mit Verwendung einer Unbestimmten t : $\sum_{x < \nu} c_x t^{a_x}$, worin die Koeffizienten c_x reelle Zahlen $\neq 0$ sind; die Exponenten sind Elemente von A , und zwar sind sie in der Summe ansteigend wohlgeordnet. Die Addition und Subtraktion der Elemente von B

erfolgt ganz entsprechend wie bei den Elementen von A . Die leere Summe bildet wiederum das 0-Element. Auch die Bestimmung des Vorzeichens und die Definition von Kleiner und Größer ist entsprechend wie in A . Damit ergibt sich auch ohne weiteres, daß die Eigenschaften (a), (b) und (c) für die Ordnung von B zutreffen.

Die Multiplikation zweier Ausdrücke

$$\sum_{\kappa < \nu} c_{\kappa} t^{a_{\kappa}}, \quad \sum_{\mu < \nu'} c'_{\mu} t^{a'_{\mu}}$$

erfolgt distributiv, wobei zur Bildung des Produktes

$$c_{\kappa} \cdot c'_{\mu} t^{a_{\kappa} + a'_{\mu}}$$

die Addition in der Gruppe A verwendet wird. Zum Nachweis, daß auf diese Weise wieder ein Ausdruck aus B resultiert, ist zweierlei zu zeigen: (1) daß jeder Wert einer Summe $a_{\kappa} + a'_{\mu}$ nur endlich oft auftritt, (2) daß die vorkommenden Summenwerte in der Ordnung nach der Größe wohlgeordnet sind. Um das erste zu beweisen, betrachten wir die Summen $a_{\kappa} + a'_{\mu}$, welche einen gemeinsamen Wert a haben. Die zugehörigen Summanden a_{κ} sind aufsteigend wohlgeordnet. Demgemäß sind die Summanden a'_{μ} ($= a - a_{\kappa}$) absteigend wohlgeordnet. Andererseits aber sind sie auch (durch die Indizes) aufsteigend wohlgeordnet, also bilden sie eine endliche Gesamtheit. (2) ergibt sich ohne weiteres daraus, daß jede Teilmenge der Summenwerte $a_{\kappa} + a'_{\mu}$ ein kleinstes Element hat.

Die multiplikative Einheit in B ist die eingliedrige Summe mit dem Koeffizienten 1 und dem 0-Element von A als Exponenten. Ferner ist ersichtlich, daß das Produkt zweier positiver Elemente wieder positiv, und das Produkt aus einem positiven und einem negativen Element negativ ist. Es gibt somit keinen Nullteiler in dem Ring B . Hiernach ist es möglich, von B zu dem Quotientenkörper Q überzugehen.

Auf den Körper Q läßt sich die Ordnung von B mittels der Vorzeichenbestimmungen in B ausdehnen. Für die so resultierende Ordnung gilt wegen der Beschaffenheit der Ordnung von B , daß zwischen je zwei verschiedenen Elementen von Q ein Element von B liegt. (Wie im § 5 ausgeführt wird, fällt sogar der Körper Q mit B zusammen.) Damit ergibt sich, daß die Ordnung von Q dicht ist und ferner auch dem Cantorsche Axiom genügt, da dieses ja durch B erfüllt wird. Offensichtlich ist Q ein nicht-archimedischer Körper. Somit ist das gewünschte Modell gewonnen. —

Durch die am Anfang dieses Paragraphen angestellten Überlegungen werden wir auf die Möglichkeit geführt, das System der reellen Zahlen zu charakterisieren, als einen solchen geordneten Körper, dessen Ordnung das Cantorsche Stetigkeitsaxiom erfüllt und außerdem die Bedingung, daß jedes nicht-leere und nach rechts offene Anfangsstück mit einer abzählbaren Folge konfinal ist.

Die gleiche Kennzeichnung der Stetigkeit ist auch für ein Größensystem möglich, wenn noch die Bedingung der Halbierbarkeit jeder Größe hinzugenommen wird. Andererseits kann hier auch beidemale anstatt der Bedingung (3) das Archimedische Axiom beibehalten werden. In diesem Falle

genügt bei den Größensystemen an Stelle der Bedingung der Halbierbarkeit die Forderung, daß jede Größe in kleinere zerlegbar ist.

Im Fall der Beibehaltung des Archimedischen Axioms kann statt der rein ordnungstheoretischen Fassung des Cantorsche Axioms auch die metrische Fassung genommen werden, bei welcher für die Intervallfolge die Bedingung hinzutritt, daß die Intervall-Längen unter jede Größe sinken⁵⁾. Dabei ist es im Sinne der Absonderung des Cantorsche Axioms von dem archimedischen Axiom wünschenswert, diese Größenbedingung so zu fassen, daß nicht beliebig kleine Bruchteile der Einheit, sondern beliebig kleine Größen des betreffenden Größensystems gemeint sind. Das Cantorsche Axiom in dieser Fassung ist, wie man leicht nachweist, gleichbedeutend mit derjenigen Vollständigkeitsbedingung, welche besagt, daß jede dem Cauchyschen Konvergenzkriterium (im Sinne des genannten Größenbegriffes) genügende Folge einen Limes hat⁶⁾. Die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms von dem so gefaßten Cantorsche Axiom ist aus einem von Hilbert gegebenen Modell zu entnehmen⁷⁾.

§ 5. Der bei der Modellkonstruktion in § 4 verwendete Übergang von dem Ring B zu dem Quotientenkörper Q läßt sich als entbehrlich erkennen, wofür allerdings eine eingehendere Betrachtung erforderlich wird.

Nämlich wir können zeigen, daß der Ring B selbst schon ein Körper ist. Der Nachweis dafür besteht darin, festzustellen, daß zu jedem von 0 verschiedenen Element b aus B ein reziprokes existiert. Ein solches Element b ist darstellbar in der Form

$$c_0 t^{a_0} \cdot \left(1 + \frac{c_1}{c_0} t^{a_1 - a_0} + \dots \right), \quad c_0 \neq 0,$$

wobei der Klammerausdruck die Form $1 + u$ hat und in u alle auftretenden Exponenten positive Elemente von A sind. Nun können wir das Reziproke von b ansetzen in der Form

$$\frac{1}{c_0} t^{-a_0} (1 - u + u^2 - u^3 + \dots).$$

Daß die Entwicklung dieses Ausdruckes nach Potenzen von t möglich ist und ein zu b reziprokes Element liefert, wird erwiesen, indem wir zeigen, daß die Exponenten von t , die in den Entwicklungen der Potenzen u^k ($k=1, 2, \dots$) auftreten, sich aufsteigend wohlordnen lassen und daß ferner

⁵⁾ Hinsichtlich der Beziehungen zwischen diesen beiden Fassungen des Cantorsche Axioms vgl. die Abhandlungen von R. BALDUS: Zur Axiomatik der Geometrie III, Sitzgsber. Heidelbg. Akad. Wiss., Math.-nat. Klasse 1930, 5. Abh., und von A. SCHMIDT: Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie, Sitzgsber. Heidelbg. Akad. Wiss., Math.-nat. Klasse 1931, 5. Abh.

⁶⁾ Auf diese Gleichwertigkeit wurde ich seinerzeit von R. SIKORSKI hingewiesen. Es sei bei dieser Gelegenheit auf die interessanten Beispiele von nicht-archimedischen Körpern aufmerksam gemacht, die SIKORSKI aufgestellt hat: On an ordered algebraic field. C. R. Soc. Sci. et des Lettres de Varsovie 41, Cl. III, 69—96 (1948).

⁷⁾ Vgl. die in Fußnote ⁵⁾ genannte Abhandlung von A. SCHMIDT, S. 6.

für jeden solchen Exponenten e nur endlich viele Koeffizienten von t^e zu addieren sind.

Dazu überlegen wir zunächst folgendes: Das Element u von B hat die Form $\sum_{\kappa < \nu} q_{\kappa} t^{d_{\kappa}}$ wobei die d_{κ} positiv und aufsteigend wohlgeordnet sind. Die Potenz u^k hat demnach die Gestalt einer Summe von Gliedern $c t^e$, worin die Exponenten aufsteigend wohlgeordnet sind und jeder von ihnen eine k -gliedrige Summe von Exponenten d_{κ} ist. Hiernach besteht die Aufgabe darin, zu zeigen: (1) Die Werte der endlichen Summen aus den d_{κ} sind aufsteigend wohlgeordnet. (2) Jeder Summenwert wird nur durch endlich viele verschiedene Summen aus den d_{κ} dargestellt.

Sei M die Menge dieser Summenwerte; M ist eine Teilmenge von A . Die Ordnung der Elemente von M nach wachsender Größe bestimmt sich in erster Linie nach der Anfangskomponente, in zweiter Linie nach dem Koeffizienten der Anfangskomponente und dann nach den weiteren Gliedern. Die Anfangskomponente eines Elementes e aus M ist identisch mit der Anfangskomponente des größten Summanden in einer jeden der Summendarstellungen von e . Sie stimmt also überein mit der Anfangskomponente eines d_{κ} . Diese Anfangskomponenten sind aber, so wie die d_{κ} selbst, aufsteigend wohlgeordnet.

Zum Nachweis von (1) genügt es demnach zu zeigen, daß die Elemente von M mit fester Anfangskomponente s wohlgeordnet sind, wobei im Sinne transfiniter Induktion vorausgesetzt werden kann, daß dieses für kleinere vorkommende Anfangskomponenten zutrifft.

Das geschieht nun auf folgende Weise. Jede Summe von Exponenten d_{κ} , welche ein Element aus M mit der Anfangskomponente s darstellt, besteht zum Teil aus Gliedern mit der Anfangskomponente s , welche den „Hauptteil“ der Summe bilden, und einem „Rest“. In dem Hauptteil hat s einen bestimmten Koeffizienten, der zugleich der Koeffizient von s in der ganzen Summe ist. Sei c einer der so vorkommenden Koeffizienten, und sei $M_{s,c}$ die Menge der Elemente aus M mit der Anfangskomponente s und einem Koeffizienten $\leq c$. In der Wohlordnung der d_{κ} nach aufsteigender Größe gibt es ein erstes solches mit der Anfangskomponente s , wobei c_0 der Koeffizient von s sei. Es können nun die Hauptteile von darstellenden Summen für Elemente von $M_{s,c}$ aus höchstens $\left\lfloor \frac{c}{c_0} \right\rfloor$ Summanden bestehen. Diese höchstens $\left\lfloor \frac{c}{c_0} \right\rfloor$ -gliedrigen Summen sind aber aufsteigend wohlgeordnet, wie es ja schon bei der Bildung der Potenzen u^k benutzt wird. Somit sind die Hauptteile in den Summendarstellungen der Elemente von $M_{s,c}$ aufsteigend wohlgeordnet. Zugleich sind aber die Reste in diesen Summendarstellungen auf Grund unserer Induktionsannahme wohlgeordnet; folglich sind auch die Elemente von $M_{s,c}$ aufsteigend wohlgeordnet und somit auch die Elemente von M mit der Hauptkomponente s . Damit ist die Behauptung (1) bewiesen.

Zum Nachweis von (2) machen wir wiederum eine transfinite Induktion nach der Anfangskomponente s des betreffenden Elementes e von M . c sei der Koeffizient von s in e . Auf Grund von (1) sind die Hauptteile der

darstellenden Summen von e aufsteigend wohlgeordnet; daher sind die Reste in diesen Summen absteigend wohlgeordnet. Andererseits sind diese, wiederum nach (1), auch aufsteigend wohlgeordnet, also haben wir nur endlich viele Werte von Hauptteilen und von Resten. Für jeden Wert des Hauptteiles gibt es aber wegen der durch c beschränkten Gliederzahl nur endlich viele Summendarstellungen, und für die Werte der Reste folgt das gleiche aus unserer Induktionsannahme. Somit haben wir nur endlich viele Summendarstellungen von e .

Hiermit sind nun die Behauptungen (1) und (2) über die Menge M als zutreffend erkannt. Daraus folgt zunächst die Möglichkeit, die unendliche Summe $1 - u + u^2 - u^3 + \dots$ in B zu bilden. Gleichermäßen ergibt sich allgemein, daß für ein Element u von B , worin alle Exponenten von t positiv sind (d.h. ein gegenüber 1 unendlich kleines Element), eine beliebige Potenzreihe

$$r_0 + r_1 u + r_2 u^2 + \dots$$

mit reellen Koeffizienten $r_0, r_1, r_2 \dots$ in B gebildet werden kann. Dabei entnehmen wir aus (2), daß in der Entwicklung des resultierenden Elementes von B nach Potenzen von t jeder vorkommende Exponent nur in der Entwicklung endlich vieler Potenzen von u , hernach aber nicht mehr auftritt. Dieser Umstand hat weiter auch zur Folge, daß die Multiplikation zweier aus Potenzreihen in u gewonnener Elemente so ausgeführt werden kann, daß zuerst die Reihen in u formal ausmultipliziert werden und hernach die Entwicklung nach Potenzen von t erfolgt. Es bleiben daher auch alle formal algebraischen Identitäten zwischen u -Reihen für die entsprechenden Elemente aus B gültig.

Insbesondere folgt hiernach, daß das Element von B , welches durch die Reihe $1 - u + u^2 - u^3 + \dots$ dargestellt wird, zu $1 + u$ reziprok ist. Damit ist nun der Ring B als ein Körper erwiesen. Überdies ergeben sich aber noch bezüglich dieses Körpers etliche weitere Feststellungen. So insbesondere, daß für jede natürliche Zahl n zu jedem positiven Element von B eine n -te Wurzel existiert. Gleichermäßen folgt, daß im Bereich der gegenüber 1 unendlich kleinen Elemente die durch Potenzreihen definierten elementaren transzendenten Funktionen wie e^u , $\log(1 + u)$, $\arctg u$ usw. in B existieren, wobei die Additionstheoreme dieser Funktionen gültig bleiben.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (Schweiz).

(Eingegangen am 16. März 1955.)

Green-Goursat Theorem.

In memory of ISSAI SCHUR.

By

S. BOCHNER.

In a recent paper [1] we have generalized from complex to real variables GOURSAT's classical proof for the formula

$$(1) \quad \oint f(z) dz = 0$$

in which only the existence of the derivative

$$(2) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} = f'(z)$$

is being assumed, but nothing further on the behaviour of $f'(z)$ as a function of the variable point z is being stipulated (explicitly).

In the present paper our previous theorem will be rounded off by incorporating two further generalizations, both noteworthy, we think (part I). Then, a peculiarity of the one-dimensional case will be commented upon (part II), and finally an effect of the entire generalization on the CAUCHY formula with remainder term,

$$(3) \quad f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta, \bar{\zeta}) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\frac{\partial f(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z},$$

will be discussed (part III).

Most modern papers on GREEN and STOKES theorem are very much more elaborate and refined than is the present one (see for instance [2] and authors there quoted), but we do not think that our theorems 1 and 2 are actually directly contained in any of them or that the direction or aim of the present paper has been anticipated as such.

Part I. Green's Theorem for Two Variables.

Theorem 1. *Let D be a bounded (open) domain in the (x, y) -plane and let C be its boundary. The formula*

$$(4) \quad \int_C A dy - B dx = \int_D (A_x + B_y) dx dy$$

holds under the following assumptions 1.—5.

1. *The boundary C consists of one or several simple closed rectifiable curves.*

2. *The functions $A(x, y)$, $B(x, y)$ are defined and continuous in the closure $\bar{D} = D + C$.*

3. At each point x_0, y_0 of D the functions A, B have STOLZ derivatives, meaning that

$$(5) \quad \begin{cases} A(x, y) = A(x_0, y_0) + A_{x_0} \cdot (x - x_0) + A_{y_0} \cdot (y - y_0) + o(|z - z_0|) \\ B(x, y) = B(x_0, y_0) + B_{x_0} \cdot (x - x_0) + B_{y_0} \cdot (y - y_0) + o(|z - z_0|), \end{cases}$$

where $z = x + iy$.

4. The sum

$$(6) \quad \Phi(x, y) \equiv A_x + B_y$$

is LEBESGUE integrable over D , meaning that

$$(7) \quad \int_D |A_x + B_y| dx dy < \infty.$$

5. At each point x_0, y_0 of D we have the generalized continuity property

$$(8) \quad \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ |z - z_0| < \varepsilon}} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int |\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)| dx dy = 0.$$

Remark 1. In [I] we have established this theorem under the more special assumptions that $\Phi(x, y)$ is continuous (in the ordinary sense) and that the curves C are rectilinear polygons, and the present more general version would reflect the natural scope of the theorem, if it were not for the fact that the continuity property 5 can be relaxed to a certain extent, for a sufficiently smooth boundary at any rate (compare Remark 9 in part II). In this connection we would like to point out that according to a theorem of LEBESGUE,—for its one-dimensional version see [3], p. 13,—any LEBESGUE integrable function $\Phi(x, y)$ in D possesses the continuity property (8) at the points (x^0, y^0) of D automatically, but with the possible exception of a set of measure 0, whereas in our theorem no *general* set of measure 0 could be excepted, although certain null sets of special structure could.

Remark 2. As already emphasized in [I] the novelty of this version of GREEN's theorem lies in the fact that no assumption on the behaviour of any of the functions A_x, B_y and also A_y, B_x *separately* is being made, but only on their combination (6) which is the only one occurring explicitly in the formula.

Remark 3. If we introduce the differential operators

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial y},$$

and if we designate an arbitrary function $F(x, y)$ symbolically by $f(z, \bar{z})$ then our theorem implies

$$(10) \quad \int_C f(z, \bar{z}) dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} dz, \quad d\bar{z} dz = 2i dx dy,$$

under the assumption that f is continuous in $D + C$, and is STOLZ differentiable in D as a function of (x, y) , and that the function $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ is LEBESGUE integrable over D and has the property (8) at each point of it.

Remark 4. It is easily verified that if $\Phi(x, y)$ has property (8) then for any continuous factor $\lambda(x, y)$ the product $\Psi(x, y) = \Phi(x, y) \lambda(x, y)$ will have it likewise. Also if D_ε is a neighborhood of (x_0, y_0) which contains a circle $|z - z_0| < \alpha \varepsilon$ and is itself contained in a circle $|z - z_0| < \beta \varepsilon$, where α, β are independent of ε , then (8) implies

$$(11) \quad \int_{D_\varepsilon} |\Psi(x, y) - \Psi(x_0, y_0)| dx dy = o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Remark 5. If $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ is a continuously differentiable one-one mapping of a domain S of the (u, v) -plane into our domain D , and if

$$(12) \quad J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0,$$

then we have

$$(13) \quad \int_D \Phi(x, y) dx dy = \int_S \Psi(u, v) du dv,$$

where $\Psi(u, v) = \Phi(x, y) J(u, v)$, in the sense that if either integral (13) exists then so does the other. Furthermore if (u_0, v_0) maps into (x_0, y_0) , then for small increments we have

$$\Delta z_0 = 0(\Delta w_0) \quad \text{and} \quad \Delta w_0 = 0(\Delta z_0),$$

and remark 4 leads to the following conclusion. If $\Phi(x, y)$ possesses property (8) as function in (x, y) then $\Psi(u, v)$ also possesses this property as function in (u, v) .

Remark 6. If on a joint interval $0 \leq t \leq 1$ a sequence of functions $z_n(t) = x_n(t) + i y_n(t)$ is convergent to $z(t)$, if all $z_n(t)$ are of bounded variation and their variations are jointly bounded,

$$(14) \quad V_{0,1}\{z_n(\cdot)\} \leq M,$$

and if a sequence of continuous functions $\varphi_n(t)$ is uniformly convergent to $\varphi(t)$ on $0 \leq t \leq 1$, then

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n(t) dz_n(t) = \int_0^1 \varphi(t) dz(t)$$

[RIEMANN-STIELTJES integrals, say]. This implies as follows.

Remark 7. If on a closed pointset $\bar{D}$ in (x, y) -plane there is given a sequence of (continuous) rectifiable curves $C_n: z_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$; if they converge uniformly in $0 \leq t \leq 1$ to the curve $C: z(t)$; if the lengths of the curves C_n are jointly bounded; and if $A(x, y)$ and $B(x, y)$ are continuous functions on $\bar{D}$; then we have

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} A(x_n(t), y_n(t)) dy_n(t) - B(x_n(t), y_n(t)) dx_n(t) \\ &= \int_C A(x(t), y(t)) dy(t) - B(x(t), y(t)) dx(t), \end{aligned}$$

that is

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} A dy - B dx = \int_C A dy - B dx.$$

Remark 8. In the plane of $w = u + iv$ let S be a bounded domain which is bounded by the (outer) circle

$$R^0: w = w^0 + r^0 e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

and (perhaps) by the additional (inner) circles

$$R^m: w = w^m + r^m e^{i\vartheta}, \quad m = 1, \dots, n.$$

If for $0 < \varepsilon < 1$ we introduce the circles

$$R^0: w = w^0 + (1 - \varepsilon) r^0 e^{i\vartheta}$$

$$R^m: w = w^m + (1 + \varepsilon) r^m e^{i\vartheta}$$

then for ε sufficiently small they bound a domain S_ε interior to S which for $\varepsilon \rightarrow 0$ converges to the latter. Now, let $z = f(w)$ be a conformal mapping from the domain S into our previous domain D which also carries the circles R^0, R^m into rectifiable curves C^0, C^m respectively. It then carries the approximating circles $R_\varepsilon^0, R_\varepsilon^m$ into approximating curves $C_\varepsilon^0, C_\varepsilon^m$ which are uniformly convergent to the boundary curves C^0, C^m in parameter, and, what is decisive for us, the lengths of the curves $C_\varepsilon^0, C_\varepsilon^m$ are jointly bounded in ε , see [4], p. 194. Thus, if we put $C_\varepsilon = C_\varepsilon^0 + C_\varepsilon^1 + \dots + C_\varepsilon^m$, then by remark 7 we have

$$(17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} A dy - B dx = \int_C A dy - B dx$$

for any functions A, B continuous in $D + C$.

Proof of Theorem 1. Following the classical procedure of GOURSAT we first assume, as we did in [I], that the domain D is a rectilinear triangle, which we will denote by D_0 , and that the assumptions 2.—5. of the theorem are fulfilled in an open neighborhood U of the closed set $\bar{D}_0 = D_0 + C_0$. Assuming (4) not to hold, we write,

$$(18) \quad \left| \int_{C_0} A dy - B dx - \int_{D_0} \Phi(x, y) dx dy \right| = \alpha > 0,$$

and we subdivide D_0 into 4 rectilinear triangles $D_1^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, 4$, any two of which are congruent so that their sides are half as long as the corresponding ones in D_0 itself. Due to the "additivity" of relation (4), assumption (18) implies that we have

$$\left| \int_{C_1} A dy - B dx - \int_{D_1} \Phi(x, y) dx dy \right| \geq \frac{\alpha}{4}$$

for at least one of the triangles $D_1^{(\nu)}$, which we have chosen fixed and denoted by D_1 . Continuing in this manner we obtain a sequence of triangles $D_0 > D_1 > D_2 > D_3 \dots$ with the following properties. Firstly we have

$$(19) \quad \left| \int_{C_n} A dy - B dx - \int_{D_n} \Phi(x, y) dx dy \right| \geq \frac{\alpha}{4^n};$$

secondly we have

$$\text{length } [C_n] = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

and

$$\frac{1}{4^n} = o(\text{area } [D_n]);$$

and thirdly we have that the closures $\bar{D}_n$ have a point in common, and this point we denote by x_0, y_0 .

If now we put $A(x, y) = A' + A''$, $B = B' + B''$ where

$$\begin{aligned} A'(x, y) &= A(x_0, y_0) + A_{x_0} \cdot (x - x_0) + A_{y_0} \cdot (y - y_0) \\ B'(x, y) &= B(x_0, y_0) + B_{x_0} \cdot (x - x_0) + B_{y_0} \cdot (y - y_0), \end{aligned}$$

and A'', B'' are corresponding "remainder functions", then the parts A', B' are linear in (x, y) , and for such one we take our theorem as known, as does also GOURSAT in his case. However, since A, B are STOLZ differentiable at (x_0, y_0) , we have

$$|A''| + |B''| = o(|z - z_0|) = o\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad \text{for } z \text{ on } C_n;$$

and also

$$\Phi''(x, y) \equiv A''_x + B''_y = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Therefore,

$$\int_{C_n} A'' dy - B'' dx = o(\max_{x \in C_n} [|A''_x| + |B''_y|]) \cdot \text{length } [C_n] = o\left(\frac{1}{4^n}\right),$$

and

$$(20) \quad \int_{D_n} \Phi'' dx dy = o(\text{area } [D_n]) = o\left(\frac{1}{4^n}\right),$$

and this would not be compatible with relation (19) for $A = A''$, $B = B''$; whence the conclusion.

The protective neighborhood U was needed because the point (x_0, y_0) in the proof might be on the boundary C of $D \equiv D_0$, but we can now dispense with it by the following reasoning. Let the origin $(0, 0)$ be a point of D and let $z = z(t)$ be a parametrization of C . If we introduce the triangle $C_\varepsilon: z_\varepsilon = (1 - \varepsilon)z(t)$, $0 < \varepsilon < 1$, then it bounds a subdomain D_ε of D of which D is such a neighborhood, so that our conclusion applies to D_ε at first. However, we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} \Phi(x, y) dx dy = \int_D \Phi(x, y) dx dy$$

whenever the LEBESGUE integral on the right side exists, and on the other hand we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} A dy - B dx = \int_C A dy - B dx$$

by remark 7, and thus (4) holds if D is a triangle.

Next, by combinatorial "additivity" it holds whenever the bounding curves $C^0, C^1, \dots, C^n$ are rectilinear polygons. But then, again by the use of remark 7, it can be easily shown that it holds whenever the curves are arbitrarily convex, and especially whenever they are circles.

Turning now to the most general domain D as envisaged in the theorem, we introduce a conformal mapping of it into a domain S with circular boundary curves R , as in remark 8; and if, as in remark 8, we approximate to D by

subdomains D_ϵ whose boundaries C_ϵ map into circles R_ϵ of S , then on account of relation (17), our assertion will follow from the following lemma, finally.

Lemma 1. Let U be a neighborhood of $D+C$, and let $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ be a one-one continuously differentiable mapping, with positive Jacobian, of the neighborhood U into a neighborhood V in (u, v) -plane, and let $S+R$ be the image of $D+C$, and let it be known that our theorem has already been established for this domain S ; then it also holds for the domain D .

In fact, if we put

$$A_1(u, v) = A(x, y) \frac{\partial y}{\partial v} - B(x, y) \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$B_1(u, v) = B(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} - A(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}$$

then we have identically

$$A \, dy - B \, dx = A_1 \, du - B_1 \, dv$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v},$$

and all that is needed for the proof of the lemma has already been anticipated in remark 5.

Part II. Several Variables.

For more than two dimensions our theorem also holds (compare theorem 1) in [I!] but the case of "general" boundary surfaces is fraught with difficulties which we do not wish to enter into. However we do wish to make a statement resembling the present two-dimensional one, and we will make it for a certain type of simplex therefore.

For any $k \geq 1$, in the Euclidean $E_k: (u_j)$ we take a rectilinear k -dimensional simplex S , whose boundary we denote by R , and we take some open neighborhood V of $R+S$ also. We also take an arbitrary continuously differentiable mapping with positive Jacobian,

$$x_j = x_j(u_1, \dots, u_k), \quad j = 1, \dots, k$$

of the neighborhood V in $E_k: (u_j)$ into a neighborhood U in $E_k: (x_j)$, and the resulting image of (S, R) shall be denoted by (D, C) then.

Theorem 2. In $E_k: (x_j)$ let D be any k -dimensional simplex as just described and let C be its boundary. Then the formula

$$(21) \quad \int_C \sum_{j=1}^k A_j(x_k) (-1)^{j-1} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k = \int_D \Phi(x_j) dv_x,$$

$$(22) \quad \Phi(x_j) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial x_k},$$

holds under the following assumptions. Each of the functions

$$A_1(x_j), \dots, A_k(x_j)$$

is defined and continuous in $D + C$ and has a STOLZ derivative at each point (x_j^0) of D . The function $\Phi(x_j)$ is LEBESGUE integrable over D ,

$$\int_D |\Phi(x_j)| dv_x < \infty,$$

and at each point (x_j^0) of D we have

$$(23) \quad \int_{x-x^0 < \varepsilon} |\Phi(x_j) - \Phi(x_j^0)| dv_x = o(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Remark 9. Assumption 5 in theorem 1 was needed only for the proof of the inequality (20), and therefore we may state as follows. If in theorem 1 (or 2) the domain D is a rectilinear polyhedron, then assumption (8), or (23), can be relaxed in the following manner. If $\{T\}$ is a family of k -dimensional rectilinear simplices in E_k any two of which are similar or antisimilar to one another and if each T contains the point (x_j^0) on its closure then we have

$$(24) \quad \int_T (\Phi(x_j) - \Phi(x_j^0)) dv_x = o(\text{volume } [T]),$$

as volume $[T]$ tends to 0, without absolute value signs under the integral.

Now, GOURSAT's method of proof for theorem 2 can also be made to apply to the one-dimensional case $k=1$, in which case D is an interval $a < x < b$, and C is the combinatorial pair of points $x=a$, $x=b$, and the resulting relation is

$$(25) \quad A(b) - A(a) = \int_a^b \frac{dA}{dx} dx.$$

Property (24) reads in this case

$$\lim_{h+k \rightarrow 0} \frac{1}{h+k} \int_{x^0-h}^{x^0+h} \frac{dA}{dx} dx = 0, \quad h \geq 0, k \geq 0, h+k > 0,$$

and thus the following statement is included in theorem 2.

Theorem 3. Relation (25) holds whenever $A(x)$ is continuous in $a \leq x \leq b$, differentiable at each point of $a < x < b$, and $\frac{dA}{dx}$ is LEBESGUE integrable over $a < x < b$, and the function

$$B(x) = \int_a^x \frac{dA}{d\xi} d\xi$$

has a derivative

$$(26) \quad \frac{dB(x)}{dx} \equiv \frac{dA(x)}{dx}$$

at each point in $a < x < b$.

This is a simple enough theorem, but it is not entirely "trivial" nevertheless. In fact, if we introduce the difference $F(x) = B(x) - A(x)$ then (26) implies

$$(27) \quad \frac{dF(x)}{dx} = 0,$$

and in order to conclude (25) it is necessary to know that (27) implies $F(x) = \text{constant}$, which is ROLLE's theorem, no less. Thus we see that, in the one-dimensional case, GOURSAT's method of proving (25) by subdividing the interval (a, b) into equal halves successively is as good as ROLLE's reasoning, and for $k \geq 2$ it is a rather efficient replacement for it.

We are now returning to the k -dimensional case, and to the following compare [5] and chapter VIII in [6].

We take a domain D and a subdomain D_0 whose closure $\bar{D}_0$ is contained in D , and we denote by ϱ the distance from D_0 to the boundary of D . If for $\sigma < \varrho$ we take in the sphere

$$(28) \quad S_\sigma: (t_1^2 + \dots + t_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma$$

an integrable function $K(t) \equiv K(t_1, \dots, t_k)$, for which

$$(29) \quad \int_{S_\sigma} K(t) dv_i = 1,$$

say, and if a function $A(x) \equiv A(x_1, \dots, x_k)$ is defined and continuous in D , then for x in D_0 , we can introduce the "average"

$$(30) \quad A^K(x) = \int_{S_\sigma} A(x-t) K(t) dv_i$$

which, incidentally, for $\sigma \rightarrow 0$, converges to $A(x)$ there. This function (30) is a "smoothing" of $A(x)$ itself in the following manner (among others). If we replenish the function $K(t)$ in (28) to a function in the entire E_k by putting it $= 0$ for $|t| > \sigma$, and if we also replenish $A(x)$ to a function in E_k by putting it $= 0$ for x in $E_k - D$ then we can write

$$(31) \quad A^K(x) = \int_{E_k} A(x-t) K(t) dv_i$$

and also

$$(32) \quad A^K(x) = \int_{E_k} A(t) K(x-t) dv_i.$$

Now, in the first place, (32) implies that if $K(t)$ as a function in E_k belongs to differentiability class $C^{(1)}$ there, then $A^K(x)$ belongs to $C^{(1)}$ in E_k , and especially in D ; and, in the second place, if $A(x)$ itself belongs to $C^{(1)}$ in D , then $A^K(x)$ belongs to $C^{(1)}$ in D_0 and we can also interchange differentiation with integration, thus

$$(33) \quad \frac{dA^K(x)}{dx_j} = \int_{S_\sigma} \frac{\partial A(x-t)}{\partial x_j} K(t) dv.$$

Now, if $A(x)$ has only a STOLZ derivative at each point then the second property cannot be asserted, but our theorem 2 will permit us to make a certain statement nevertheless.

Before making it, we define as follows. If $K(t)$ is integrable in (28) then we say that it is a $C^{(1)}$ -kernel, if for every function $A(x)$ which is continuous

in D , the corresponding function (32) is continuous in D_0 . As already remarked, if $K(t)$, as a function in E_k is $C^{(1)}$ there, then it is a $C^{(1)}$ -kernel in S_σ , but there are important $C^{(1)}$ -kernels which are more general than that. For instance for $h \leq \frac{\sigma}{k}$, the function

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{(2h)^k}, & |t_j| \leq h, j = 1, \dots, k \\ 0, & \text{some } |t_j| > 0, \end{cases}$$

is a $C^{(1)}$ -kernel, the corresponding function (32) being the familiar average

$$\frac{1}{(2h)^k} \int_{-h}^h \dots \int_{-h}^h A(x_1 + t_1, \dots, x_k + t_k) dv_i$$

then.

Theorem 4. *If in a domain D in E_k we are given functions $A_1(x), \dots, A_k(x), \Phi(x)$ with exactly the same properties as in theorem 2, thus being connected by (22) among others, and if for a $C^{(1)}$ -kernel $K(t)$ in S_σ we introduce the averages*

$$(34) \quad A_j^K(x) = \int_{S_\sigma} A_j(x-t) K(t) dv_i$$

$$(35) \quad \Phi^K(x) = \int_{S_\sigma} \Phi(x-t) K(t) dv_i$$

then we have the relation

$$(36) \quad \sum_{j=1}^k \frac{\partial A_j^K(x)}{\partial x_j} = \Phi^K(x)$$

for almost all points x in D_0 . (If $\Phi^K(x)$ is continuous in D_0 , then this holds at all points without exception.)

Proof. For x in D_0 and t in S_σ , the original relation (22) implies

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial A_j(x-t)}{\partial x_j} = \Phi(x-t)$$

and therefore

$$\int_{S_\sigma} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial A_j(x-t)}{\partial x_j} \right) K(t) dv_i = \int_{S_\sigma} \Phi(x-t) K(t) dv_i,$$

and our theorem asserts, that under the assumptions of theorem 2, the left side can be re-arranged thus:

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_\sigma} A_j(x-t) K(t) dv_i,$$

this involving two interlocking interchanges between summation, integration and differentiation.

We take in D_0 a function $\lambda(x) = \lambda(x_1, \dots, x_k)$ which is $C^{(1)}$ there and which vanishes outside a polyhedral neighborhood U in D_0 (a so-called "testing

function" in the terminology of [5]). For fixed t in S_σ , the function in x ,
 (37)
$$\bar{A}_j(x) = \lambda(x) A_j(x - t),$$

has a STOLZ derivative at each point of D_0 , and the "divergence"

$$\bar{\Phi}(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{A}_j(x)}{\partial x_j} = \lambda(x) \Phi(x - t) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_j} A_j(x - t)$$

has the same properties in D_0 , as $\Phi(x)$ has in D . However, all functions $\bar{A}_j(x)$ are 0 on the boundary of U , and thus by theorem 2 we have

$$\int_U \bar{\Phi}(x) dv_x = 0,$$

that is

$$\int_U \left[\lambda(x) \Phi(x - t) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} A_j(x - t) \right] dv_x = 0.$$

If we now multiply this by $K(t)$ and integrate with respect to t over S_σ , then by FUBINI's theorem the two integrations can be interchanged, and we have

$$\int_U \left[\lambda(x) \Phi^K(x) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} A_j^K(x) \right] dv_x = 0.$$

However, the functions $A_j^K(x)$ are $C^{(1)}$ and λ is 0 outside U , so that

$$\int_U \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} A_j^K dv_x = - \int_U \lambda \sum \frac{\partial A_j^K}{\partial x_j} dv_x,$$

and altogether we obtain

$$\int_{D_0} \lambda(x) \left[\Phi^K(x) - \sum_{j=1}^k \frac{\partial A_j^K}{\partial x_j} \right] dv_x = 0.$$

But, if this is so for every testing function $\lambda(x)$ as introduced, then we indeed must have relation (36) for almost all points of D_0 , as claimed.

Part III. Cauchy Formula with Remainder Term.

In $E_2: (\xi, \eta)$ if $H(\xi, \eta)$ is LEBESGUE measurable and

$$(38) \quad \int_{E_2} \frac{|H(\xi, \eta)|}{1 + |\xi| + |\eta|} d\xi d\eta < \infty$$

then for almost all (x, y) the integral

$$(39) \quad G(x, y) = \int_{E_2} \frac{H(\xi, \eta)}{\xi - z} d\xi d\eta$$

exists, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, and $G(x, y)$ is LEBESGUE integrable over any bounded domain. This follows from FUBINI's theorem by showing that

$$(40) \quad \int_{|x| \leq A} dx \int_{E_2} dy \left| \frac{H(\xi, \eta)}{\zeta - z} \right| d\xi d\eta < \infty,$$

for any $A < \infty$ (integrate with respect to x, y first), and it is also easily seen that if $H(\xi, \eta)$ is bounded in a neighborhood, then the integral (39) exists at all points of the neighborhood without exception and is likewise bounded there.

Also, if we apply to the integral

$$\int_{\zeta \leq 1} \frac{H(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad |z| < 1,$$

E. E. LEVI's transformation of coordinates

$$\begin{aligned} \xi - x &= \varrho(\cos \vartheta - x), & \eta - y &= \varrho(\sin \vartheta - y) \\ 0 \leq \vartheta &< 2\pi, & 0 < \varrho &\leq 1, \end{aligned}$$

then it goes over into

$$\int_{\varrho=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{2\pi} h(x(1-\varrho) + \varrho \cos \vartheta, y(1-\varrho) + \varrho \sin \vartheta) \frac{1 - \cos \vartheta x - \sin \vartheta y}{e^{i\vartheta} - z} d\varrho d\vartheta,$$

and we hence conclude that if the function $H(\xi, \eta)$ is $C^{(r)}$, $r \geq 1$, in a neighborhood U , then $G(x, y)$ is also $C^{(r)}$ there, and if $H(\xi, \eta)$ is analytic in the real variables ξ, η there, then $G(x, y)$ is likewise so in x, y . However, $G(x, y)$ cannot be a holomorphic function in z unless $H(\xi, \eta) \equiv 0$ in U , as the following theorems will imply.

Now, if in (40) we replace the letter z by ζ , and subsequently the function $f(\zeta, \bar{\zeta})$ by the function

$$\frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z},$$

then by the customary procedure of excising a small neighborhood around z the following theorem ensues.

Theorem 5. *If D and C are as in theorem 1, if $f(\zeta, \bar{\zeta})$ is continuous in $D + C$ and STOLZ differentiable in D , and if $f_{\bar{\zeta}}(\zeta, \bar{\zeta})$ is LEBESGUE integrable over D and possesses the continuity property 5 of theorem 1 there, then we have*

$$(41) \quad f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta, \bar{\zeta}) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z}$$

at all points z of D at which the second integral exists (the exceptional points having measure zero at most).

If $f_{\bar{\zeta}}$ is also locally bounded in D , then the formula is valid at all points, and if $f_{\bar{\zeta}}$ is $C^{(r)}$ or real-analytic, then $f(\zeta, \bar{\zeta})$ itself is likewise so.

Of interest is the following companion theorem.

Theorem 6. If $h(\zeta, \bar{\zeta})$ is LEBESGUE integrable on D so that the function

$$(42) \quad g(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{h(\zeta, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z}$$

exist almost everywhere and is LEBESGUE integrable over D itself, then for any testing function $\lambda(z, \bar{z})$ in D we have

$$(43) \quad \int_D \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} \cdot g + \lambda \cdot h \right) d\bar{z} dz = 0,$$

and if furthermore it so happens that $g(z, \bar{z})$ has a STOLZ derivative everywhere and $g_{\bar{z}}$ has the suitable properties, then

$$(44) \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = h(z, \bar{z})$$

almost everywhere.

Proof. From (42) we obtain

$$\int_D \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} g d\bar{z} dz = - \int_D h(\zeta, \bar{\zeta}) \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} d\bar{z} dz}{z - \zeta} \right] d\bar{\zeta} d\zeta.$$

However, if in (41) we replace $f(z, \bar{z})$ by $\lambda(z, \bar{z})$ and recall that λ is 0 on the boundary of D , then we see that the inner integral has the value $\lambda(\zeta, \bar{\zeta})$, which proves (43). Next, as in the proof to theorem 4, if g has a STOLZ derivative everywhere, and $g_{\bar{z}}$ has the suitable properties (for instance if it is continuous) then (43) implies

$$\int_D \lambda \left(h - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) d\bar{z} dz = 0$$

and this implies (44) a.e.

Theorem 5 (but not theorem 6) has a natural extension to k complex variables (see [7], p. 660/1). If we put

$$\omega = d\bar{\zeta}_1 d\zeta_1 + \cdots + d\bar{\zeta}_k d\zeta_k \quad (\text{external form})$$

and

$$V_j = \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{\left(\sum_p |\zeta_p - z_p|^2 \right)^k}$$

then a generalization of (41) is

$$(45) \quad (2\pi i)^k f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_k, \bar{z}_k) = \int_C f \sum_j V_j d\zeta_j \omega^{k-1} - \frac{1}{k} \int_D \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_j} V_j \omega^k,$$

and an extension of theorem 5 is as follows.

Theorem 7. If D is a polyhedral domain, and the function f has a STOLZ derivative in D , and if each of the k functions

$$(46) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}_k}$$

is LEBESGUE integrable and possesses the continuity property of theorem 2, then (45) holds at all points at which the second integral in (45) exists (the exceptional points having measure 0 at most).

If the functions (46) are also locally bounded in D , then the formula is valid at all points, and if they are $C^{(r)}$ as real-analytic then f itself is likewise so.

References.

- [1] BOCHNER, S.: Functions in one complex variable as viewed from the theory of functions in several variables, in "Lectures on Functions of a Complex Variable", p. 315. University of Michigan Press 1955. — [2] KRICKEBERG, K.: Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz, I and II. Math. Nachr. **10**, 261—314 (1953); **11**, 35—60 (1954). — [3] LEBESGUE, H.: Séries trigonométriques. 1906. — [4] SEIDEL, W.: Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen. Math. Ann. **104**, 182—243 (1931). — [5] BOCHNER, S.: Linear partial differential equations with constant coefficients. Ann. of Math. **47**, 202—212 (1946). — [6] BOCHNER, S., and W. T. MARTIN: Several complex variables. Princeton 1948. — [7] BOCHNER, S.: Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. of Math. **44**, 652—674 (1943).

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton N. J. (USA.).

(Eingegangen am 2. April 1955.)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.
Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt,
B. L. van der Waerden.

LXXIX. Band:

Versicherungsmathematik

Von Dr. Walter Saxer, o. Professor an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich.
In zwei Teilen. Erster Teil: IX, 249 Seiten Gr.-8°. 1955.

DM 36.—; Ganzleinen DM 39.60

Inhaltsübersicht: I. Zinstheorie. — II. Theorie der Personengesamtheiten. — III. Die Leibrente und die Kapitalversicherungen auf ein Leben. — IV. Versicherungen auf mehrere Leben. — V. Pensionsversicherung. — VI. Prämienreserve (Deckungskapital). — VII. Über allgemeine Variationsprobleme in der Versicherungsmathematik. — VIII. Über die Konstruktion von Universaltafeln und ihre Anwendungen. — IX. Versicherungstechnische Bilanzen, ihre Analyse und die Gewinnverteilung. — X. Erneuerungstheorie. — XI. Über die Finanzierungssysteme für Sozialversicherungen. — Anhang: Über den stochastischen Aufbau der Versicherungsmathematik. Einleitung und Problemstellung. — Tabellen: Rohe einjährige Sterbenswahrscheinlichkeiten der Schweizer Bevölkerung, Männer 1939/44, Frauen 1939/44. Ausgegliche, einjährige Sterbenswahrscheinlichkeiten der Schweizer Bevölkerung, Männer 1939/44, Frauen 1939/44. Sterbetafel Deutsches Reich, Männer 1924/26. Sterbenswahrscheinlichkeiten und Kommutationszahlen zum Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$. Verschiedene Invalidierungswahrscheinlichkeiten. Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer und Frauen gemäß den technischen Grundlagen für die Eidg. Versicherungskasse, Bern 1950. Sterbenswahrscheinlichkeit für invalide Männer gemäß den technischen Grundlagen für Pensionsversicherungen, Städt. Versicherungskasse Zürich 1950. Sterbenswahrscheinlichkeit für invalide Frauen gemäß den technischen Grundlagen für Pensionsversicherungen, Städt. Versicherungskasse Zürich 1950. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

Das vorliegende Werk stellt einen Ersatz für das seit längerer Zeit vergriffene und in mehreren Auflagen erschienene Buch des verstorbenen A. Loewy über Versicherungsmathematik dar. Der Verfasser hat sich entschlossen, vorerst einen „elementaren“ Band und daran anschließend einen zweiten „höheren“ Band zu publizieren.

Mit Rücksicht darauf, daß es sich um eine elementare, für Studierende und Praktiker bestimmte Darstellung handeln soll, wurde die diskontinuierliche Methode gewählt. Von der Analysis und insbesondere von der Differential- und Integralrechnung wird im vorliegenden Band überhaupt nur im 8. Kapitel Gebrauch gemacht, Ausführungen, die nicht in direktem Zusammenhang mit den übrigen Kapiteln stehen. Leser mit einer mathematischen Vorbildung, wie sie ungefähr ein Abiturient besitzt, können deshalb das ganze Buch mit Ausschluß dieses Kapitels und eventuell des Anhangs verstehen. Im Anhang wurde der Zusammenhang zwischen der im Buch wie üblich benutzten deterministischen Annahme von festen Sterbetafeln und der Auffassung im Sinne der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung knapp dargestellt. Es wurde Wert darauf gelegt, die Hauptgrundlagen der Versicherungsmathematik und ihre in der Praxis benutzten Resultate möglichst scharf zu formulieren. In diesem Sinne dürfte das Buch vielleicht einige neue Aspekte gegenüber bisherigen Lehrbüchern bieten, vor allem in den Kapiteln über die Berechnung der Reserven, die Variation der Grundlagen, die Erneuerungstheorie und im Anhang.

Zweiter Teil: In Vorbereitung.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“ herausgegeben von L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner. Neue Folge.

Reihe:

Algebraische Geometrie. Besorgt von B. Segre, Rom, Italien.

Heft 4:

Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique

Par Professeur Dr. Pierre Samuel, Clermont-Ferrand, Frankreich. IX, 133 Seiten
Gr.-8°. 1955. DM 23,60

Table de matières: I. Théorie globale élémentaire: Idéaux et ensembles algébriques affines. — Ensembles algébriques dans l'espace projectif. — Projections. — Produits. — Intersections d'ensembles algébriques. — Normalisation. — Extension du corps de base. Variétés. — Propriétés vraies presque partout. — Cycles. Coordonnées de CHOW. — Correspondances. — II. Géométrie algébrique locale. Multiplicités d'intersection: L'anneau local d'un point, ou d'une sous-variété. — Points normaux. — Cône des tangentes. Espace tangent de ZARISKI. — Points simples. — Théorie locale des multiplicités d'intersection. — Intersections de cycles locaux et de cycles. — Rappel algébrique. Annexe historique. Annexe terminologique. Index alphabétique.

Reihe:

Gruppentheorie. Besorgt von R. Baer, Urbana/Illinois, USA.

Heft 5:

La Géométrie des Groupes classiques

Par Professeur Dr. Jean Dieudonné, Evanston/Illinois, USA. Mit 2 Abbildungen.
VII, 115 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 19,60

Introduction. Les théories exposées dans ce fascicule sont, grosso modo, celles qui font l'objet du premier tiers de l'ouvrage de B. L. VAN DER WAERDEN: Gruppen von linearen Transformationen, paru antérieurement dans cette collection. L'étendue beaucoup plus grande qui leur est donnée ici reflète avant tout le nombre assez considérable de travaux sur le sujet qui ont vu le jour depuis vingt ans, et qui, en bien des endroits, ont amené une refonte notable des points de vue sous lesquels on considérait ces questions autrefois. D'autre part, s'il ne pouvait être question, dans le cadre qui nous était assigné, de donner des démonstrations complètes, on a cependant cherché, beaucoup plus que dans l'ouvrage précité, à en indiquer au moins les principes, le plus souvent possible.

Parmi les groupes de transformations linéaires, seuls les groupes dits «classiques» sont considérés dans ce qui suit, et les questions traitées à leur sujet relèvent de la partie «élémentaire» de la théorie des groupes, gravitant essentiellement autour des deux notions de sous-groupe et d'homomorphisme. Les parties de la théorie qui font intervenir des notions plus complexes, comme la théorie des représentations linéaires des groupes, ou des considérations de topologie ou de géométrie différentielle, ne sont pas abordées; l'outil à peu près unique qui intervient dans les démonstrations reste l'algèbre linéaire, sous la forme, fortement influencée par le langage et les conceptions de la géométrie, qu'elle a prise à l'époque moderne.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik“ erhalten die „Ergebnisse der Mathematik“ zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg,
und ein Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.